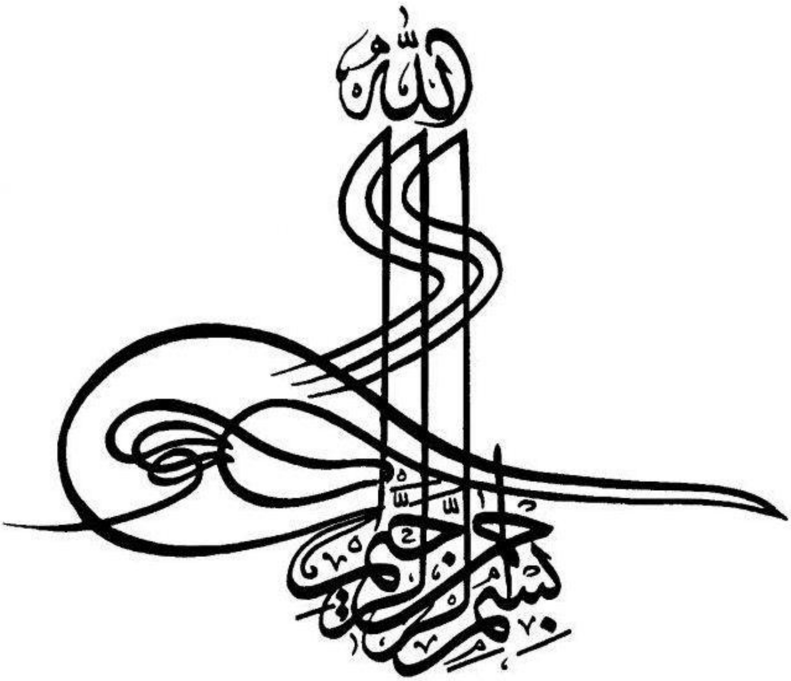


جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف **حبیب هاشمی** کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس دربرگزاری کلاس های کنکور و دبیر رسمی آموزش وپرورش با شماره **۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱** تماس حاصل فرمایید۰

احتمال
سوم تجربی

- طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی
- پاسخ کاملا تشریحی
- تمرین‌های برای آمادگی

مؤلف:
حبیب هاشمی

۱۳۹۵

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

۱ اصل ضرب و احتمال های مربوط به آن

۱.۱ یادآوری اصل ضرب

اصل ضرب (اصل شمارش): اگر عملی به n_1 طریق مختلف انجام شود و پس از آن عمل دومی به n_2 طریق مختلف انجام گیرد و... و عمل k اُمی به n_k طریق مختلف صورت پذیرد، این k عمل با هم (پشت سرهم) به $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ طریق مختلف صورت می گیرند.

مثال۱: می‌خواهیم کارت‌هایی بسازیم که در سمت راست آن ها، یکی از حروف {ا،ب،ج،د} و در سمت چپ آن ها، عدد دو رقمی بدون صفر نوشته شود. چند کارت متفاوت می‌توان ساخت؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\۲\\\vdots\\۹}}\ \underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\۲\\\vdots\\۹}}\ \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{\text{ا}\\\text{ب}\\\text{ج}\\\text{د}}} = ۹ \times ۹ \times ۴ = ۳۲۴$$

مثال۲ : در یک امتحان چهار گزینه‌ای با ده سؤال متفاوت، اگر همه‌ی دانش‌آموزان به همه ی سؤال‌ها پاسخ دهند، چند پاسخنامه‌ی متفاوت می‌توانیم داشته باشیم؟ (تعداد دانش‌آموزان از تعداد سؤالات بیشتر است) شبیه تمرین در کلاس ۴ ص ۱۸۰ ریاضی۲.

جواب: $\underbrace{\boxed{۴}}_{\text{سوال اول}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\text{سوال دوم}} \times \dots \underbrace{\boxed{۴}}_{\text{سوال دهم}} = ۴^{۱۰} = (۲^{۲})^{۱۰} = ۲^{۲۰}$

سوال اول	سوال دوم	سوال دهم
گزینه ۱	گزینه ۱	گزینه ۱
گزینه۲	گزینه۲	گزینه۲
گزینه ۳	گزینه ۳	گزینه ۳
گزینه۴	گزینه۴	گزینه۴

نکته: همیشه در حل مسائلی که با استفاده از اصل ضرب حل می‌شوند اگر محدودیتی بیان شود از خانه‌ایی شروع به شمارش حالات می‌کنیم که محدودیت در آن باشد. (بخصوص وقتی تکرار مجاز نیست)

برای پیدا کردن تعداد اعداد، مطمئن ترین روش اصل ضرب می باشد.

چند محدودیت مهم:

۱) اگر صفر در بین ارقام داده شده باشد، نمی‌توان صفر را در سمت چپ عدد قرار داد.

۲) اگر در بین اعداد داده شده صفر وجود داشته باشد، **به ناچار** باید از اصل ضرب استفاده کنیم.(نمی توان از جایگشت وترکیب استفاده کرد.)

۳)عددی مضرب ۲ (بخش‌پذیر بر ۲) است، که رقم سمت راست آن ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ باشد.

۴) عددی مضرب ۳ است، که مجموع ارقام آن بر ۳ بخش پذیر باشد.

۵) عددی مضرب ۵ (بخش‌پذیر بر ۵) است، که رقم سمت راست آن ۰یا ۵ باشد.

۶)عددی مضرب ۶ است، که هم مضرب ۲ باشد و هم مضرب ۳

نکته: قبل از انجام هر کاری مجاز بودن یا نبودن تکرار ارقام را مشخص می کنیم؛ سپس سوال را حل می کنیم.

مثال۳: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجازاست)

جواب: (اگر تکرار ارقام مجاز باشد، از هرجا شروع به شمارش حالات کنیم ایراد ندارد.)

$$\boxed{۳}\times\boxed{۴}\times\boxed{۴}=۴۸$$

۱	۰	۰
۲	۱	۱
۳	۲	۲
	۳	۳

مثال۴: چند عدد ۶ رقمی با ارقام ۰، ۱ وجود دارد؟ (سراسری تجربی)

جواب:

$$\boxed{۱}\times\boxed{۲}\times\boxed{۲}\times\boxed{۲}\times\boxed{۲}\times\boxed{۲}=۲^{۵}=۳۲$$

۱	۰	۰	۰	۰	۰
	۱	۱	۱	۱	۱

مثال۵: چند عدد چهار رقمی بدون رقم ۷ داریم؟ (شبیه تمرین ۵ ص ۱۸۲ریاضی۲)

جواب:

$$\boxed{۸}\times\boxed{۹}\times\boxed{۹}\times\boxed{۹}=۵۸۳۲$$

	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	۶	۶	۶
۸	۸	۸	۸
۹	۹	۹	۹

مثال۶: چه تعداد عدد چهار رقمی زوج وجود دارد؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{9}}_{\substack{1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}} \times \underbrace{\boxed{10}}_{\substack{1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}} \times \underbrace{\boxed{10}}_{\substack{1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}} \times \underbrace{\boxed{5}}_{\substack{2\\4\\6\\8}} = 4500$$

مثال۷: با ارقام ۰، ۱، ۵، ۷ چند عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۵ می‌توان نوشت؟(تکرار ارقام مجاز است)

جواب:

$$\underbrace{\boxed{3}}_{\substack{1\\5\\7}} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{1\\5\\7}} \times \underbrace{\boxed{2}}_{\substack{5}} = 24$$

مثال۸: با ارقام ۰، ۲، ۳، ۴، ۷ چند عدد چهار رقمی بزرگتراز ۲۰۰۰ می‌توان نوشت؟

جواب: $4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500 - 1 = 499$ (عدد ۲۰۰۰هم در بین این ۵۰۰ عدد قرار دارد که باید حذف شود.)

$$\underbrace{\boxed{4}}_{\substack{2\\3\\4\\7}} \times \underbrace{\boxed{5}}_{\substack{2\\3\\4\\7}} \times \underbrace{\boxed{5}}_{\substack{2\\3\\4\\7}} \times \underbrace{\boxed{5}}_{\substack{2\\3\\4\\7}} = 500$$

نکته: کد با عدد متفاوت است. رقم سمت چپ و حتی رقم‌های بعدی آن (کد) می‌تواند صفر باشد؛ در حالی که این ویژگی در مورد اعداد صدق نمی کند.

مثال۹: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ چند کد سه رقمی می‌توان نوشت؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۱\\۲\\۳\\۴}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۱\\۲\\۳\\۴}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۰\\۱\\۲\\۳\\۴}} = ۱۲۵$$

مثال۱۰: با ارقام ۲، ۳، ۴، ۰، ۵ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۲)\\۳\\۴\\۵}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۳)\\۴\\۵\\۰}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۴\\۵\\۰}} = ۴ \times ۴ \times ۳ = ۴۸$$

مثال۱۱: با ارقام عدد ۱۳۵۷۹ چند عدد چهار رقمی و بزرگتر از ۴۰۰۰ می‌توان نوشت؟

جواب:

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۵)\\۷\\۹}}}^{\text{شروع}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۷)\\۹\\۱\\۳}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۹)\\۳\\۱}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۱\\۳}} = ۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۷۲$$

مثال ۱۲: با ارقام عدد ۱۳۵۷۹ چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۳۰۰۰ و کمتر از ۷۰۰۰ می توان نوشت؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۳)\\۵}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۵)\\۷\\۹\\۱}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۷)\\۹\\۱}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۹\\۱}} = ۴۸$$

مثال۱۳: چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و زوج، بزرگتر از ۴۰۰۰ وجود دارد؟ (ارقام زوج‌اند نه خود عدد)

جواب:

شروع

$\boxed{۳} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} = ۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۷۲$

(۴) (۲) (۶) ۸
۶ ۶ ۸ ۰
۸ ۸ ۰
۰

> **نکته:** وقتی در طرح مسئله ای ارقام زوج مطرح می شود ، یعنی برای تمام خانه ها از اعداد زوج استفاده می کنیم. اما وقتی عدد زوج ذکر شود، فقط رقم یکان آن باید زوج باشد، و مابقی ارقام هم می توانند زوج باشند و هم فرد.

مثال۱۴: چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگ تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟(سراسری تجربی ۹۰)

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ √ ۴) ۱۰۸

جواب: گزینه ۳

برای نوشتن عدد چهار رقمی بزرگ تر از ۳۰۰۰ و با ارقام فرد و بدون تکرار ارقام، از اصل ضرب کمک می گیریم. کافی است تک تک خانه های یکان، دهگان، صدگان و هزارگان را شمارش حالت کرده و در هم ضرب کنیم. دقت کنید شروع شمارش حالت ها از خانه ای انجام می شود که محدودیت رقم گذاری در آنجاست. پس شمارش حالت ها را از هزارگان انجام می دهیم. داریم:

$$۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۹۶$$

مثال۱۵: با ارقام {۰،۱،۲،۵،۸} چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت به طوری که رقم یکان و صدگان یکسان باشند؟

جواب:$۱۰۰ = \boxed{۱} \times \boxed{۵} \times \boxed{۵} \times \boxed{۴}$

برای رقم هزارگان ۴ انتخاب داریم(صفر در سمت چپ عدد قرار نمی‌گیرد). برای رقم دهگان ۵ انتخاب داریم؛ چون قرار است رقم صدگان و یکان مثل هم باشند، آن ها را یکی در نظر می‌گیریم و ۵ انتخاب دارند. یا این که می‌گوییم رقم صدگان ۵ انتخاب دارد، چون می خواهیم رقم صدگان و یکان یکسان باشند، برای رقم یکان تنها یک انتخاب داریم(باید همان رقم قرار گرفته در صدگان را قرار دهیم).

نکته: هرگاه در طرح مسئله سه شرط زیر لحاظ شده باشد:

شرط۱: در بین ارقام داده شده، صفر وجود داشته باشد.

شرط۲: تعداد اعداد زوج (مضرب ۲) یا مضرب ۵ (بخشپذیر بر ۵) را از ما بخواهد.

شرط۳: تکرار ارقام مجاز نباشد.

آن را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم.

حالت ۱: فقط رقم صفر در یکان باشد.   حالت ۲: رقم صفر در یکان نباشد.

مثال۱۶: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۷ چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت که هیچکدام از رقم‌های آن تکرار نشده باشند؟ (شبیه تمرین ۴ ص ۱۸۶ ریاضی ۲)

جواب: ۱۵۶ = ۹۶ + ۶۰

حالت۱:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \text{شروع}\\ \boxed{5} & \times & \boxed{4} & \times & \boxed{3} & \times & \boxed{1}\\ (1) & & (2) & & 3 & & (0)\\ 2 & & 3 & & 4 & & \\ 3 & & 4 & & 7 & & \\ 4 & & 7 & & & & \\ 7 & & & & & & \end{array}$$

حالت۲:

$$\begin{array}{cccccccc} \text{شروع ۲} & & & & & & \text{شروع ۱} & \\ \boxed{4} & \times & \boxed{4} & \times & \boxed{3} & \times & \boxed{2} & = 96\\ (4) & & (1) & & 3 & & (2) & \\ 1 & & 3 & & 7 & & 4 & \\ 3 & & 7 & & 0 & & & \\ 7 & & 0 & & & & & \end{array}$$

مثال۱۷: با ارقام ۰، ۲، ۳، ۵ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟ (سراسری ریاضی)

جواب: ۱۰ = ۴ + ۶

حالت ۱:

$$\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۲)\\ ۳\\ ۵}}\times\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۳)\\ ۵}}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{۵}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{۰}=۶$$

حالت ۲:

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۲)\\ ۳}}}^{\text{شروع ۲}}\times\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۰)\\ ۳}}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{۳}\times\overbrace{\underbrace{\boxed{۱}}_{۵}}^{\text{شروع ۱}}=۴$$

۱.۲احتمال های مربوط به اصل ضرب

$$\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه}}=\frac{\text{خواسته ی احتمال}}{\text{کل اعداد خواسته شده}}}$$

مثال ۱۸: اگر با ارقام ۶، ۴، ۱، ۲ یک عدد چهار رقمی بسازیم، چقدر احتمال دارد این عدد زوج باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ✓ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

جواب:

$$n(S)=\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۲)\\ ۱\\ ۴\\ ۶}}\times\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۱)\\ ۴\\ ۶}}\times\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۴)\\ ۶}}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{۶}\quad \text{و}\quad n(A)=\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۱)\\ ۴\\ ۶}}\times\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۴)\\ ۶}}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{۶}\times\overbrace{\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۲)\\ ۴\\ ۶}}}^{\text{شروع}}$$

$$P(A)=\frac{۳\times ۲\times ۱\times ۳}{۴\times ۳\times ۲\times ۱}=\frac{۱۸}{۲۴}=\frac{۳}{۴}$$

مثال ۱۹: اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار دادن ارقام متمایز ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ به وجود آید احتمال آن که این عدد زوج باشد کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$ √

جواب:

$$n(S) = \overbrace{\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۱)\\۲\\۳\\٤}}}^{\text{شروع}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۰)\\۲\\۳\\٤}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۲\\۳\\٤}} = ۴۸$$

$$n(A) = \left\{ \underbrace{\boxed{۴}\boxed{۳}\boxed{۱}}_{\text{فقط صفر}} + \underbrace{\boxed{۳}\boxed{۳}\boxed{۲}}_{\text{۲ یا ۴}} \right\} = ۳۰ \rightarrow \mathrm{P(A)} = \frac{۳۰}{۴۸} = \frac{۵}{۸}$$

تمرین۱: چهار رقم ۳، ۲، ۱، ۰ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی:

الف) مضرب ۲ حاصل می شود؟

جواب: $\frac{۵}{۹}$

ب) مضرب ۶ حاصل می شود؟ (سراسری تجربی ۸۹ خارج از کشور)

جواب: $\frac{۵}{۹}$

تمرین۲: چهار رقم ۹، ۷، ۵،۰ را به تصادف در کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی:

الف) مضرب ۵ حاصل می‌شود؟

جواب: $\frac{۵}{۹}$

ب) مضرب ۱۵ حاصل می‌شود؟

جواب: $\frac{۵}{۹}$

نکته: برای بررسی تعداد اعداد مضرب ۶ ابتدا مجموع اعداد را به‌دست می آوریم؛ اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر بود به سراغ مضرب ۲ می رویم.

تذکر: اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر نباشد، تعداد اعداد مضرب ۶ برابر صفر است.

نکته: برای بررسی تعداد اعداد مضرب ۱۵ ابتدا مجموع اعداد را به‌دست می آوریم؛ اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر بود، به سراغ مضرب۵ می رویم.

تذکر: اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر نباشد تعداد اعداد مضرب ۱۵ برابر صفر است.

مثال۲۰: با استفاده از اعداد مجموعه {۱،۲،۵،۸،۹} به طور تصادفی عددی ۵ رقمی ساخته‌ایم، با چه احتمالی این اعداد از ۵۰۰۰۰ بزرگتر و از ۸۰۰۰۰ کوچکتر است؟

√۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

جواب:

$$n(S) = ۵! = ۱۲۰ \ , n(A) = \boxed{۱}\boxed{۴}\boxed{۳}\boxed{۲}\boxed{۱} = ۲۴, \mathrm{P(A)} = \frac{۲۴}{۱۲۰} = \frac{۱}{۵}$$

مثال۲۱: از بین اعداد طبیعی سه رقمی به تصادف یک عدد برداشته‌ایم با کدام احتمال:

الف) رقم ۲ در این عدد ظاهر نشده است؟

جواب:

$$n(S):\underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\٤\\٥\\٦\\۷\\۸\\۹}}\times\underbrace{\boxed{۱۰}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}}\times\underbrace{\boxed{۱۰}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\٤\\٥\\٦\\۷\\۸\\۹}}\quad,\quad n(A):\underbrace{\boxed{۸}}_{\substack{۱\\۳\\٤\\٥\\٦\\۷\\۸\\۹}}\times\underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}}\times\underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}}$$

$$\mathrm{P(A)}=\frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(S)}}=\frac{۸\times۹\times۹}{۹\times۱۰\times۱۰}=\frac{۱۸}{۲۵}$$

ب) لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است(سراسری ریاضی ۸۶).

جواب: $P(B)=۱-\frac{۱۸}{۲۵}=\frac{۷}{۲۵}$

مثال۲۲: با کدام احتمال رقم سمت راست پلاک اولین اتومبیلی که از بزرگراه خارج می‌شود از ۴ بیشتر نیست، یا مضرب ۳ می‌باشد.(رقم صفر در پلاک اتومبیل به کار نمی‌رود) (سراسری ریاضی ۸۷)

جواب:

$S=\{۱,۲,۳,\ldots,۹\}\,,n(S)=۹$

$A=$.پلاک مضرب۳ یا بیشتر از ۴ نیست

$$A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹\},n(A)=۶\rightarrow\mathrm{P(A)}=\frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(S)}}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

۲جایگشت و احتمال های مربوط به آن

۱.۲ یادآوری جایگشت

تعریف جایگشت : نحوه قرار گرفتن اشیا در کنار هم را جایگشت می نامیم.

نکته: تعداد جایگشت‌های nشی از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{n!}{\text{حاصلضرب جایگشت‌های تکراری}}$$

دقت کنید در سوالاتی از جایگشت که نیاز به فضای نمونه ای(کل حالات) داریم، از فرمول بالا استفاده می کنیم.

مثال۱: با حروف کلمه‌ی آبدانان چند کلمه‌ی ۷حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $\frac{۷!}{\underset{\text{۲ تا ن داریم.}}{۲!} \times \underset{\text{۳ تا آ داریم.}}{۳!}}$

مثال۲: با حروف کلمه‌ی ATAXIAچند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $\frac{۶!}{۳!}$

تمرین۱: با حروف کلمه‌ی شمشیر چند کلمه‌ی۵ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $۶۰ = \frac{۵!}{۲!}$

مثال۳: با حروف کلمه‌ی شاهزاده چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $۱۲۶۰ = \frac{۷!}{۲! \times ۲!}$

مثال۴: با حروف کلمه‌ی $APADANA$ چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت؟

۱√) ۲۱۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۱۰

جواب: $۲۱۰ = \frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!} = \frac{۷!}{۴!}$

مثال۵: با حروف کلمه‌ی ستایش چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: تکراری نداریم که بر تکرار تقسیم کنیم پس برابر است با !۵

مثال۶: به چند طریق می‌توان ۶ نفر را در یک صف پشت سرهم قرار داد؟

۱) ۱۲۰   ۲) ۲۴۰   ۳) ۳۶۰   ۴) ۷۲۰ √

جواب: ۷۲۰=!۶

مثال۷: ۱۰ نامه‌ی مختلف را به چند طریق می‌توان در ۱۰ پاکت مختلف قرار داد؟

جواب: !۱۰

مثال۷: با ارقام شماره تلفن «۲۲۵۷۵۵» چند شماره تلفن ۶ رقمی می‌توان ساخت؟

۱) ۳۰   ۲) ۴۰   ۳) ۶۰   ۴) ۱۲۰

جواب: $\frac{6!}{2!\times 3!}$

مخصوص صددرصدی ها

*مثال۸: با ارقام ۲، ۰، ۰، ۰، ۳ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست.)

۱)۱   ۲)۴   ۳)۸ √   ۴)۱۰

جواب: $\frac{2\times 4\times 3\times 2\times 1}{3!}$

$$\underbrace{\boxed{2}}_{\substack{(2)\\3}} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(0)\\0\\0\\3}} \times \underbrace{\boxed{3}}_{\substack{(0)\\0\\2}} \times \underbrace{\boxed{2}}_{\substack{(0)\\2}} \times \underbrace{\boxed{1}}_{2}$$

> **نکته**: اگر در بین اعداد صفر داشته باشیم، ابتدا فرض می کنیم رقم‌های داده شده متمایز هستند وبا استفاده از اصل ضرب جواب را به‌دست می‌آوریم و در آخر جواب به‌دست آمده را بر جایگشت تکرارها تقسیم می کنیم.

*مثال۹: با ارقام ۲، ۲، ۲، ۰، ۰، ۱، ۴، ۳ چند عدد هشت رقمی می‌توان نوشت؟

۱) !۸   ۲) $\frac{8!}{2!\times 3!}$ ۳) $\frac{7!}{2!}$ √   ۴) $\frac{7!}{2!\times 3!}$

جواب: $\frac{7!}{2!} = \frac{6\times 7!}{2!\times 3!}$

$$\boxed{۶}\times\boxed{۷}\times\boxed{۶}\times\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}$$

۶	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
(۲)	(۲)	(۲)	(۱)	(۴)	(۳)	(۰)	۰
۲	۲	۱	۴	۳	۰	۰	
۲	۱	۴	۳	۰	۰		
۱	۴	۳	۰	۰			
۴	۳	۰	۰				
۳	۰	۰					

*مثال ۱۰: با ارقام ۰، ۰، ۰، ۰، ۳، ۳، ۳، ۳ چند عدد زوج ۸ رقمی می‌توان نوشت؟

۱) $\frac{۸!}{۲!\times ۴!}$ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰ √

جواب: $۲۰ = \frac{۴\times ۶!\times ۴}{۴!\times ۴!}$

$$\boxed{۴}\times\boxed{۶}\times\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}\times\boxed{۴}$$

۴	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۴
(۳)	(۳)	(۳)	(۳)	(۰)	(۰)	۰	(۰)
۳	۳	۳	۰	۰	۰		۰
۳	۳	۰	۰	۰			۰
۳	۰	۰	۰				۰
	۰	۰					
	۰						

۲.۲جایگشت های خاص(کنارهم بودن چند شیء، یک در میان قرار گرفتن اشیاءو...)

۲.۲.۱قرار گرفتن چند شیءِ درکنار هم

نکته: اگر در جایگشت چند شیء قرار شد تعدادی از اشیاءکنار هم باشند، آن ها را با طناب به هم بسته و یک شی در نظر می‌گیریم.

تذکر: اگر در جا دادن این اشیاء ترتیبی ذکر نشود، جایگشت خود این اشیاء را نیز در جواب به‌دست آمده ضرب می‌کنیم.

مثال۱۱: سه کتاب متمایز ریاضی و چهار کتاب متمایز ادبی را به چند طریق ممکن می‌توان کنار هم در یک قفسه قرار داد، به طوری که:

الف) کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم باشند. (سراسری تجربی و ریاضی)

جواب: کتاب‌های ریاضی را به هم می‌بندیم و یک کتاب در نظر می‌گیریم $۵! \times ۳!$

کتاب های ادبی   کتاب های ریاضی

$\boxed{\wr\wr\wr}$ $\wr\wr\wr\wr$

ب)کتاب‌های ادبی همواره کنار هم باشند.

جواب: $۴! \times ۴!$

پ) کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم و کتاب‌های ادبی همواره کنار هم باشند؟

جواب: $۴! \times ۳! \times ۲!$

مثال۱۲: ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند، تعداد ۵ رقمی‌های حاصل کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۲)

۱) ۱۱۲   ۲) ۲۴   √ ۳) ۳۶   ۴) ۴۸

جواب: $۳! \times ۳!$

$\boxed{۱,۳,۵}\,, ۲, ۴$

مثال۱۳: ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره در آن عدد ۱۲۵ به کار رفته باشد، تعداد ۵ رقمی‌های حاصل کدام است؟

جواب: $۳! = ۶$

$\boxed{۱۲۵}\,, ۳, ۴$

مثال۱۴: تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی computer که در آن سه حرف c, m, o به صورت com قرار گرفته باشند چندتاست؟(تمرین کتاب)

۱) ۵۰۴۰   √ ۲) ۷۲۰   ۳) ۴۸۰   ۴) ۳۶۰

جواب: $۶! = ۷۲۰$

$\boxed{\text{com}}, \text{p}, \text{u}, \text{t}, \text{e}, \text{r}$

مثال ۱۵: با حروف کلمه‌ی مهتاب چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت به طوری که «الف» بلافاصله بعد «ت» بیاید؟

۱) ۱۲   ۲) ۴۸   ۳) ۲۴   ۴) ۱۲۰

جواب: $۴! = ۲۴$

$\boxed{\text{تا}}$ م ه ب

مثال۱۶: در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی opissum

الف)عبارت op وجود دارد؟

جواب: $\frac{۶!}{۲!}$

$\boxed{op}$, i , s , s , u , m

ب)عبارت osوجود دارد.

جواب: !۶

پ)oو s کنارهم هستند.

جواب: $۶! \times ۲!$

مثال۱۷: در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی opissum عبارت op وجود ندارد؟

جواب: جایگشت های کنارهم قرار نگرفتن چند شیء کنارهم، برابر است با کل جایگشت‌ها، منهای جایگشت‌های کنارهم قرار گرفتن چند شیء.

$$\frac{۷!}{۲!} - \frac{۶!}{۲!}$$

مثال۱۸: حروف کلمه‌ی $LAGRANGE$ را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم؛ در چند حالت حروف یکسان، کنار هم قرار می‌گیرند؟ (سراسری تجربی ۸۴)

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ √ ۴) ۱۴۴۰

جواب: $۶! = ۷۲۰$

$\boxed{AA}$, $\boxed{GG}$, L , R , N , E

مثال۱۹: حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم؛ در چند حالت حروف یکسان، کنار هم قرار نمی‌گیرند؟

جواب: $\frac{۸!}{۲!\times۲!} - ۶!$

تمرین۲: تعداد جایگشت های حروف کلمه ی SYSTEM به طوری که S ها کنار هم‌نباشند،کدام است؟(سراسری تجربی خارج ۹۲)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ √ ۴) ۳۶۰

جواب: گزینه ۳

مثال۲۰: تمام جایگشت‌های حروف کلمه‌ی water را در نظر بگیرید؛ در چند حالت دو حروف w , a کنار هم قرار ندارند؟(تمرین کتاب)

۱) ۱۲۰ ۲) ۷۲ √ ۳) ۴۸ ۴) ۸۲

جواب:

کل جایگشت ها − جایگشت هایی کهa, wکنار هم هستند $= ۵! - (۴! \times ۲!) = ۷۲$

مثال۲۱: با حروف کلمه‌ی computer چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان ساخت، به طوری که:

الف) حروف صدا دار کنار هم باشند(o, u, e).

جواب: $۶! \times ۳!$

ب) در آن ها کلمه‌ی $comp$ وجود داشته باشد.

جواب: $۵!$

پ) حروف r, e, t, p کنار هم نباشند.

جواب: $۸! - (۵! \times ۴!)$

مثال۲۲: افراد A , B , C , D , E , F به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند؛ به نحوی که A , B کنار هم باشند و E , F کنار هم نباشند؟

۱) ۱۶۴ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۵۶ ۴) ۱۴۴

جواب: حالت‌هایی که A, B کنار هم هستند را، منهای حالت‌هایی که A , B کنار هم هستند و E , F نیز کنار هم هستند می کنیم.

مثال۲۳: حروف کلمه‌ی LAGRANGE را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می-دهیم، مطلوبست احتمال آن که:

الف) حروف یکسان کنار هم باشند.

جواب:

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶!}{\frac{۸!}{۲! \times ۲!}} = \frac{۶! \times ۲! \times ۲!}{۸!}$$

ب) حروف یکسان کنار هم نباشند.

جواب: $\frac{۱۳}{۱۴}$

تمرین۳: حروف کلمه‌ی ATAXIA را بریده به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال، سه حرف A در کنار هم قرار می‌گیرند؟(سراسری تجربی ۸۹)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

مثال۲۴: اعداد ۹، ۶، ۲ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال، دو رقم زوج کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$ √

جواب: $p(A) = \frac{۲! \times ۲!}{۳!} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$

احتمال آن که چند شیء کنار هم باشند – ۱ =احتمال آن که چند شیء کنار هم نباشند

مثال۲۵: ۶ نفر که ۲ تای آن ها برادر می‌باشند را در یک ردیف قرار می‌دهیم. مطلوبست احتمال آن‌که برادرها کنار هم نباشند.(شبیه مثال ص ۱۶ ریاضی ۳)

جواب:

(احتمال برادرها کنار هم باشند – ۱)= احتما ل برادرها کنار هم نباشند

$$۱-\frac{۵!\times ۲!}{۶!}=۱-\frac{۵!\times ۲}{۶\times ۵!}=۱-\frac{۲}{۶}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

مثال۲۶: از بین تمام کلمات پنج حرفی که از جایگشت حروف کلمه TEACH حاصل می شود، یک کلمه به تصادف انتخاب می کنیم؛ در چند حالت بین دو حرف E و A حداقل یک حرف قرار می گیرد ؟

جواب: بین دو حرف E و A حداقل یک حرف قرار گیرد؛ یعنی دو حرف A,E درکنار هم نیستند. بنابراین از متمم کمک می گیریم.

$$۵!-(۴!\times ۲!)$$

مثال۲۷: با ارقام ۰و۱و۱و۲و۳ یک عدد ۵ رقمی نوشته ایم؛ احتمال آن که دو رقم۱ کنار هم قرار گیرند کدام است؟

جواب: در جایگشت های این ۵ رقم دو تای آن ها یکسان هستند. در ضمن صفر سمت چپ قرار نمی گیرد، بنابراین داریم:

$$n(S)=\frac{۴\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱}{۲!}=۴۸$$

اما برای یافتن تعداد حالت های مطلوب دو رقم ۱ را با هم در نظر می گیریم پس ۴ شیء متمایز داریم که صفر نمی تواند سمت چپ باشد:

$$n(A)=۳\times ۳\times ۲\times ۱=۱۸\rightarrow P(A)=\frac{۱۸}{۴۸}=\frac{۳}{۸}$$

۲.۲.۲قرار گرفتن اشیاءِ در یک جای خاص

مثال۲۸: با حروف کلمه‌ی TARANEH چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت به طوری که حرف A همواره در وسط قرار گیرد؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۷۲۰ √ ۴) ۱۴۴۰

جواب:

$$\boxed{۶}\times\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\underset{\text{حرف}A}{\boxed{۱}}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}=۶!$$

مثال۲۹: با حروف کلمه‌ی $ARAYEHA$ چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان ساخت به‌طوری که حرف A همواره در وسط قرار گیرد؟

جواب:

$$\boxed{۶}\times\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\underset{\text{حرف}A}{\boxed{۱}}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}=\frac{۶!}{\underset{\text{تعداد }A\text{های تکراری}}{۲!}}=۳۶۰$$

تمرین۴: با حروف کلمه گل بهار چند کلمه شش حرفی می‌توان ساخت به‌طوری که با حرف گ شروع و به حرف ب ختم شود؟

جواب: ۲۴

مثال ۳۰: با حروف کلمه‌ی computer چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان ساخت به طوری که حروف r , c در اول و آخر کلمه باشند؟

جواب:

$$\underset{c}{\overset{\boxed{۲}}{(r)}}\times\underbrace{\boxed{}\times\boxed{}\times\boxed{}\times\boxed{}\times\boxed{}\times\boxed{}}_{۶!}\times\underset{c}{\boxed{۱}}=۶!\times ۲$$

مثال ۳۱: ۶ نفر که ۲ تای آن ها برادر هستند را در یک ردیف قرار می‌دهیم. مطلوبست احتمال آن که برادرها در اول و آخر صف باشند.(مثال ص ۱۶ ریاضی ۳).

جواب:

$$n(S) = ۶!, n(A) = \boxed{۲} \times \underbrace{\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{}}_{۴!} \times \boxed{۱}$$

$$p(A) = \frac{۴! \times ۲}{۶!} = \frac{۴! \times ۲}{۶ \times ۵ \times ۴!} = \frac{۱}{۱۵}$$

مثال۳۲: حروف کلمه‌ی $LAGRANGE$ را بریده و به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم.

مطلوبست احتمال آن‌که:

الف) حروف R, L در اول و آخر کلمه باشند.

جواب:

$$n(A) = \frac{۲ \times ۶!}{۲! \times ۲!} \;,\; n(S) = \frac{۸!}{۲! \times ۲!} \;, P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲\times۶!}{۸!} = \frac{۲\times۶!}{۸\times۷\times۶!} = \frac{۱}{۲۸}$$

ب)حروف R, G در اول و آخر کلمه باشند.

ج)حروف A, G در اول و آخر کلمه باشند.

۲.۲.۳یک در میان قرار گرفتن اشیاءِ:

نکته: اگر یک دسته شامل m شیءِ متمایز، و دسته‌ی دیگر شامل n شیءِ متمایز باشند، و $m = n$ باشد، تعداد حالت‌هایی که:

الف) m, n شیء به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$$(m! \times n!) \times ۲$$

ب) فقط m شیء به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$$(m! \times n!) \times ۲$$

ج) فقط n شیء به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$$(m! \times n!) \times ۲$$

مثال۳۳: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف، به طور یک در میان قرار داد؟

۱) $۴! \times ۴!$ √ ۲) $۲ \times ۴! \times ۴!$ ۳) $۴! + ۴!$ ۴) $۲! \times ۴! + ۲! \times ۴!$

جواب: $(۴! \times ۴!) \times ۲$

مثال۳۴: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری که پسرها یک در میان باشند؟

جواب: $(۴! \times ۴!) \times ۲$

مثال۳۵: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری که هیچ دو دختر متوالی نباشند؟(یعنی دخترها یک در میان باشند)

جواب: $(۴! \times ۴!) \times ۲$

مثال ۳۶: با جابجایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می‌توان تشکیل داد، به طوری که رقم‌های ۲ یک در میان قرار گیرند؟(سراسری ریاضی ۸۹ خارج از کشور)

۱) ۹ √ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

جواب: $\frac{۳! \times ۳! \times ۲}{۳!} = \frac{۳! \times ۲}{۱} = ۶ \times ۲ = ۱۲$

تمرین۵: در ساختن یک کلمه شش حرفی باحروف کلمه PANAMA احتمال آن که حروف A یک در میان باشند کدام است؟

نکته: اگر یک دسته شامل m شیءِ متمایز و دسته‌ی دیگر شامل n شیءِ متمایز باشند $m = n + ۱$ باشد تعداد حالت‌هایی که:

الف) m , n شیءِ به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$$m! \times n!$$

ب) فقط m شیءِ(عدد بزرگتر) به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$$m! \times n!$$

ج) فقط n شیءِ(عدد کوچکتر) به صورت یک در میان کنار هم قرار گیرند برابر است با:

$$(m! \times n!) \times ۳$$

مثال۳۷: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری یک در میان قرار بگیرند؟

۱√) $۴! \times ۳!$ ۲) $۲ \times ۴! \times ۳!$ ۳) $۴! + ۳!$ ۴) $۲ \times ۴! + ۲ \times ۴!$

جواب: $۴! \times ۳!$

مثال۳۸: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری که دخترها یک در میان باشند؟

جواب: $۴! \times ۳!$

مثال۳۹: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری که پسرها یک در میان باشند؟

جواب: $۴! \times ۳! \times ۳$

مثال۴۰: به چند طریق می‌توان ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف قرار داد، به طوری که هیچ دو دختر متوالی نباشند؟

جواب: $۴! \times ۳!$

مثال۴۱: با جابجایی ارقام ۱۲۳۴۵۶۷ چند عدد ۷ رقمی می‌توان تشکیل داد به طوری که:

الف) ارقام فرد یک در میان باشند؟

جواب: $۴! \times ۳!$

ب) هیچ دو رقم فردی متوالی نباشند؟

جواب: $۴! \times ۳!$

ج) ارقام زوج یک در میان باشند؟

جواب: $۴! \times ۳! \times ۳$

د) بین هر دو رقم فرد، یک رقم زوج قرار گیرد؟

جواب: $۴! \times ۳!$

مثال۴۲: سه نوع کتاب علمی متمایز، و چهار نوع کتاب ادبی متمایز را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد، به طوری که کتاب‌های علمی یک در میان قرار بگیرند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۴۴ √ ۳) ۴۳۲ ۴) ۵۷۶

جواب: $۴! \times ۳! \times ۳ = ۲۴ \times ۶ \times ۳ = ۴۳۲$

تمرین۶: ظرفی شامل ۵ مهره‌ی سفید متمایز و ۴ مهره‌ی سیاه متمایز است. مهره‌ها را یکی پس از دیگری به تصادف و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم؛ چقدر احتمال دارد:

الف) مهره‌های سیاه و سفید، به صورت یک در میان خارج شده باشند.

جواب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵! \times ۴!}{۹!}$

ب) مهره‌های سفید یک در میان باشند.

پ) دو مهره‌ی سفید به صورت متوالی خارج نشود.

ت) مهره‌های سیاه یک در میان خارج شده باشند.

ج) بین دو مهره‌ی سیاه، فقط یک مهره‌ی سفید قرار گیرد.

مثال۴۳: در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی، پی در پی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌ی فرد، متوالیاً خارج نمی‌شود؟(سراسری تجربی ۹۲)

√۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

جواب: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳!\times ۲!}{۵!}=\frac{۱۲}{۱۲۰}=\frac{۱}{۱۰}$

مثال۴۴: در سؤال قبل اگر مهره‌ها با شماره زوج و یک در میان باشند، احتمال را به‌دست آورید.

جواب: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳!\times ۲!\times ۳}{۵!}=\frac{۶\times ۲\times ۳}{۱۲۰}=\frac{۳۶}{۱۲۰}=\frac{۳}{۱۰}$

مثال۴۵: پنج نفر a , b , c , d , e می‌خواهند در یک همایش سخنرانی کنند به چند طریق این ۵ نفر می‌توانند سخنرانی کنند، به طوری که بین سخنرانی a , b فقط یک نفر سخنرانی کند؟(سراسری ریاضی)

جواب: $۳\times(۳!\times ۲!)$

۳انتخاب اشیاء(ترتیب وترکیب)و احتمال های مربوط به آن

۳.۱ یادآوری ترتیب و ترکیب

در انتخاب k از n شیء متمایز دو حالت وجود دارد:

الف) اگر اولویت(تقدم و تاخر) اشیاء مهم باشد این نوع انتخاب را ترتیب می نامند و تعداد حالت های آن را از فرمول زیر به‌دست می آوریم.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ب) اگر اولویت (تقدم وتاخر) اشیاء مهم نباشد، این نوع انتخاب را ترکیب می نامیم و تعداد حالت های آن از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$c(n\,,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

مثال۱: با حروف کلمه‌ی فردوسی چند کلمه‌ی ۳ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $P(۶,۳) = \frac{۶!}{(۶-۳)!}$

در این مثال تقدم و تاخر اشیاء (حروف) مهم است به عنوان مثال اگر سه حرف (ف – ر – د) را از حروف کلمه فردوسی انتخاب کنیم می‌توان کلمه فرد و درف را باآن ساخت که باهم متفاوتند؛ یعنی با جابجایی حرف کلمه جدیدی ساخته می شود. به همین دلیل از ترتیب استفاده می شود.

نکته:

- $\binom{n}{۰} = ۱$
- اگر $a + b = n$ آنگاه $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$.

مثال۲:

$$\binom{۸}{۲} = \binom{۸}{۶} \quad , \quad \binom{۵}{۵} = \binom{۵}{۰} \quad , \quad \binom{۱۰۰}{۹۸} = \binom{۱۰۰}{۲}$$

$$\binom{\boxed{۵}}{\boxed{۲}} = \frac{۵ \times ۲}{۲ \times ۱} \quad , \quad \binom{\boxed{۱۰}}{\boxed{۱}} = \frac{۱۰}{۱} \quad , \quad \binom{\boxed{۵}}{\boxed{۳}} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳}{۳ \times ۲ \times ۱}$$

$$\binom{\boxed{۵}}{\boxed{۵}} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} , \binom{\boxed{۱۰}}{\boxed{۲}} = \frac{۱۰ \times ۹}{۲ \times ۱} , \binom{\boxed{۶}}{\boxed{۳}} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۳ \times ۲ \times ۱}$$

مثال۳: تعداد زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه شش عضوی $\{a, b, c, d, e, f\}$ را به‌دست آورید.

جواب: در این مثال تقدم و تاخر اشیا (عضوها) مهم نیست، برای مثال زیرمجموعه های $\{c, b, a\}$و$\{a, b, c\}$ با هم تفاوت ندارند به همین دلیل از ترکیب استفاده می‌کنیم.

$c(۶,۳) = ۲۰$

مثال۴: هفت نقطه روی دایره ای قرار دارند، حساب کنید که با این هفت نقطه:

الف)چند پاره خط ایجاد می‌شود؟

جواب: $C(۷,۲)$

ب)چند بردار ایجاد می‌شود؟

جواب: $P(۷,۲)$

ج)چند مثلث ایجاد می‌شود؟

جواب: $C(۷,۳)$

چ) چند وتر ساخته می‌شود؟

جواب: $C(۷,۲)$

ح)چند چهار ضلعی محدب که هر راس چهار ضلعی واقع بر یک نقطه باشد می توان ساخت؟

جواب: $C(۷,۴)$

مثال۵: در یک اداره ۱۲ نفر مشغول به کار هستند؛ می خواهیم از بین آن ها:

الف)۳ نفر انتخاب کنیم؛ این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

جواب: چون ترتیب انتخاب اعضاء مهم نیست، پس:

$$C = \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۳\times۲\times۱} = ۲۲۰$$

ب)یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کنیم؛ این کار به چند طریق امکان‌پذیراست.

جواب: چون ترتیب انتخاب اعضاء مهم است، پس:

$$P = (۱۲,۳) = \frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!} = ۱۳۲۰$$

مثال۶: به چند طریق می‌توان یک کمیته از میان ۵ دانش‌آموز و ۴ دانشجو انتخاب کرد، به طوری که در هر کمیته ۲ دانش‌آموز و ۳ دانشجو عضویت داشته باشد؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰ √

جواب: $\binom{۵}{۲} \times \binom{۴}{۳} = ۱۰ \times ۴ = ۴۰$

مثال۷: به چند طریق از بین ۵ زن و ۴ مرد، انجمنی ۳ نفری می‌توان تشکیل داد به طوری‌که:

الف) فقط یک نفر آن ها زن باشد.

جواب: یعنی یکی از زنها و دوتا از مردها $\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}$

ب) هر سه نفر همجنس باشند.

جواب: یعنی هر سه مرد باشند یا هرسه زن $\binom{۵}{۳} + \binom{۴}{۳}$

پ) حداقل یک نفر آن ها مرد باشد.(شبیه تمرین ۲ ص ۱۹۰ ریاضی ۲)

جواب: یعنی یا یکی از مردها انتخاب بشه، یا دوتا، و یا هرسه تا مرد باشند. پس داریم:

$$\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱} + \binom{۴}{۳}\binom{۵}{۰}$$

ت) حداکثر دو نفر آن ها زن باشد.

جواب: یعنی یا دو تا از آن‌ها زن باشه یا یکی، و یا هیچکدام از آن‌ها

$$\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱} + \binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲} + \binom{۵}{۰}\binom{۴}{۳}$$

مثال۸: از بین ۵ دانش آموز رشته تجربی و ۳ دانش آموز ریاضی، به چند طریق می توان سه نفر را برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد، به طوری که لااقل دو نفراز آن ها دانش‌آموز تجربی باشند؟(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۰)

۱)۲۵ ۲)۳۰ ۳)۳۵ ۴)۴۰ √

جواب: $\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱} + \binom{۵}{۳}\binom{۳}{۰} = ۱۰ \times ۳ + ۱۰ \times ۱ = ۴۰$

مثال۹: به چند طریق می توانیم از بین ۵ مهره آبی، ۴مهره سبز، و۲ مهره زرد۳ مهره انتخاب کنیم، به طوری که:

الف) رنگ مهره ها مهم نباشد؟

جواب: $C(۱۱,۳)$

ب)هر ۳ مهره آبی باشند ؟

جواب: $C(۵,۳)$

ج) هر سه مهره سبز باشند؟

جواب: $C(۴,۳)$

چ) دو مهره آبی و یک مهره سبز باشد ؟

جواب: $C(۵,۲) \times C(۴,۱)$

ح) دو مهره آبی باشد؟

جواب: $C(۵,۲) \times C(۶,۱)$

خ) هر سه مهره همرنگ باشند؟

جواب: $C(۵,۳) + C(۴,۳)$

د) مهره ها همرنگ نباشند؟

جواب: $C(۱۱,۳) - [C(۵,۳) + C(۴,۳)]$

ز)حداکثر دو مهره همرنگ باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳) - [C(۵,۳) + C(۴,۳)]$

ذ) مهره ها متمایز باشند؟ (هیچ دو مهره ای همرنگ نباشد)

جواب: $C(۵,۱) \times C(۴,۱) \times C(۲,۱)$

ر) حداقل دو مهره همرنگ باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳) - [C(۵,۱) \times C(۴,۱) \times C(۲,۱)]$

س) مهره‌ها فقط از دو رنگ باشند؟

جواب:

$$C(۱۱,۳) - \left[C(۵,۳) + C(۴,۳) + \left(C(۵,۱) \times C(۴,۱) \times C(۲,۱)\right)\right]$$

ش) حداقل یک مهره آبی باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳) - [C(۵,۰) \times C(۶,۳)]$

ل) حداکثر دو مهره آبی باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳) - [C(۵,۳) \times C(۶,۰)]$

م) حداکثر دو مهره زرد باشد؟

جواب: $C(۱۱,۳)$

مثال۱۰: تعداد قطر های یک n ضلعی محدب را به‌دست آورید.

جواب: تعداد کل پاره خط ها برابر $C(n,۲)$ است، که برای تعداد قطرها بایستی تعداد اضلاع یعنی n را از کل پاره خط ها کم کنیم. $C(n,۲) - n$

مثال۱۱: از ۱۰ پرسش موجود به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد به شرط آن‌که:

الف) ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

جواب: $\binom{۵}{۴} \times \binom{۵}{۴}$

ب) ۵ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

جواب: $\binom{۵}{۵} \times \binom{۵}{۳}$

پ) حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟(سراسری ریاضی ۸۹)

جواب: $\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۴} + \binom{۵}{۵}\binom{۵}{۳}$

ت) حداکثر ۳ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

جواب: $\binom{5}{3} \times \binom{5}{5}$

مثال۱۲: از میان ۴ جفت کفش متمایز، به چند طریق می‌توان سه لنگه انتخاب کرد به طوری که:

الف) هیچ جفتی در میان آن ها نباشد.

جواب:

$$\underbrace{\binom{4}{3}}_{\substack{\text{انتخاب سه} \\ \text{جفت کفش}}} \times \underbrace{\binom{2}{1}}_{\substack{\text{انتخاب یک لنگه} \\ \text{از جفت اول}}} \times \underbrace{\binom{2}{1}}_{\substack{\text{انتخاب یک لنگه} \\ \text{از جفت دوم}}} \times \underbrace{\binom{2}{1}}_{\substack{\text{انتخاب یک لنگه} \\ \text{از جفت سوم}}}$$

ب) در میان آن ها یک جفت وجود داشته باشد.

جواب:

$$\underbrace{\binom{4}{1}}_{\substack{\text{انتخاب یک} \\ \text{جفت (دو لنگه)}}} \times \underbrace{\binom{6}{1}}_{\text{انتخاب یک لنگه}}$$

مثال۱۳: ۶ زوج داریم به چند طریق می‌توان ۴ نفر از آن ها را به‌طور تصادفی انتخاب کرد، به طوری که:

الف) هیچ زن و شوهری در بین آن ها نباشد.

جواب: $\binom{6}{4} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1}$

ب) فقط یک زوج در بین آن ها باشد.

جواب:

روش اول:

$$\underbrace{\binom{۵}{۲}\times\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}}_{\text{}} \quad \times \quad \underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{}}$$

از بین ۵ زوج باقیمانده ۲ زوج انتخاب کرده سپس از هر کدام یک نفر انتخاب می کنیم

یک زوج از بین ۶ زوج انتخاب می کنیم.

روش دوم:

$$\binom{۶}{۱}\times\left(\binom{۱۰}{۲}-۵\right)$$

مثال۱۴: از هریک از مدارس A ,B ,C ,D , E چهار نفر به اردوگاه دانش آموزی دعوت شده اند. به چند طریق می توان سه دانش آموز دو به دو غیر هم مدرسه ای انتخاب کرد.(سراسری تجربی ۹۲)

جواب: $\binom{۵}{۳}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۴}{۱}=۶۴۰$

۳.۱.۱ترکیب های خاص (شامل و فاقد)

نکته: اگر بخواهیم از بین n شیءِ r شیءِ را برداریم به طوری که حتماشامل m انتخاب اجباری باشد، تعداد انتخاب‌ها از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید: $\binom{n-m}{r-m}$

مثال۱۵: از میان ۸ نفر دانش‌آموزان یک کلاس به چند طریق می‌توان ۳ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کرد به طوری که شخص به خصوصی حتما در میان آن ها باشد؟

۱) ۵۶   ۲) ۲۱ √   ۳) ۲۸   ۴) ۳۵

جواب: $\binom{۸-۱}{۳-۱}=\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲\times۱}=۲۱$

نکته: اگر بخواهیم از بین n شیءِ r شیءِ را برداریم به طوری که فاقد m شیءِ به خصوص باشد، تعداد انتخاب‌ها از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید: $\binom{n-m}{r}$

مثال۱۶: از میان ۸ نفر دانش‌آموزان یک کلاس به چند طریق می‌توان ۳ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کرد به طوری که یک شخص به خصوصی حتما در میان آن ها نباشد؟

۱) ۵۶ ۲) ۲۱ ۳) ۲۸ ۴) ۳۵ √

جواب: $\binom{۸-۱}{۳} = \binom{۷}{۳} = \frac{۷\times۶\times۵}{۳\times۲\times۱} = ۳۵$

مثال۱۷: از بین ۱۰ نفر فوتبالیست به چند طریق می‌توان ۴ نفر را انتخاب کرد، به طوری‌که بهترین بازیکن در بین آن ها باشد و بدترین بازیکن در بین آن ها نباشد؟

۱) $\binom{۸}{۵}$ ۲) $\binom{۹}{۳}$ ۳) $\binom{۹}{۴}$ ۴) $\binom{۸}{۴}$

جواب: حاصل برابر است با $\binom{۸}{۳}$ که جز گزینه های داده شده نیست، ولی داریم اگر:

$a + b = n$ آنگاه $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$

دراین‌صورت:

$$\binom{۸}{۳} = \binom{۸}{۵}$$

مثال۱۸: تعداد زیر مجموعه سه عضوی مجموعه $\{a , b , c , d , e , f\}$ که:

الف) شامل a باشد کدام است؟(سراسری تجربی ۸۳)

جواب: $\binom{۵}{۲} = \frac{۵\times۴}{۲\times۱} = ۱۰$

ب) شامل f نباشد کدام است؟

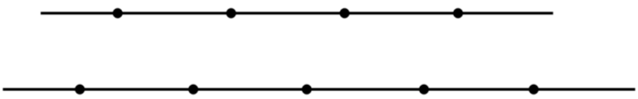
جواب: $\binom{۵}{۳} = \frac{۵\times۴\times۳}{۳\times۲\times۱} = ۱۰$

ت) شامل a باشد ولی شامل f نباشد کدام است؟

جواب: $\binom{۴}{۲} = \frac{۴\times۳}{۲\times۱} = ۶$

۳.۱.۲مسائل هندسی ترکیب

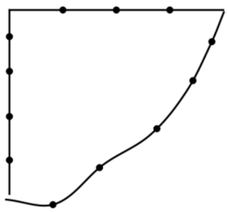
مثال ۱۹: با نقاط مشخص شده در شکل زیر چند مثلث می‌توان ساخت؟



۱) ۱۰۰   ۲) ۶۰   ۳) ۷۰ √   ۴) ۸۰

جواب: $\binom{۴}{۱} \times \binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲} \times \binom{۵}{۱} = ۴ \times ۱۰ + ۶ \times ۵ = ۷۰$

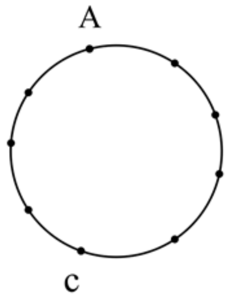
مثال ۲۰: با نقاط مشخص شده در شکل زیر، چند مثلث می‌توان ساخت؟



۱) ۲۲۰   ۲) ۱۸۵   ۳) ۲۱۵ √   ۴) ۲۴۰

جواب: $\binom{۱۲}{۳} - \left[\binom{۳}{۳} + \binom{۴}{۳}\right] = ۲۲۰ - (۱ + ۴) = ۲۲۰ - ۵ = ۲۱۵$

مثال ۲۱: در شکل مقابل چند چهار ضلعی با نقاط داده شده می‌توان رسم کرد که:



الف) Ac ضلع چهار ضلعی باشد.

جواب: $\binom{۳}{۲} + \binom{۴}{۲} = ۳ + ۶ = ۹$

ب) Ac قطر چهار ضلعی باشد.

جواب: $\binom{۳}{۱} \times \binom{۴}{۱} = ۳ \times ۴ = ۱۲$

۳.۱.۳انتخاب همراه با جایگشت

در بعضی مسائل علاوه بر انتخاب اشیاءِ آن‌ها را در کنار هم می‌چینیم. به این نوع مسائل انتخاب همراه با جایگشت می گوئیم.

مثال۲۲: با حروف کلمه‌ی $computer$ چند کلمه‌ی ۵ حرفی با معنی و بی معنی می‌توان ساخت؟ به طوری که:

الف) در همه‌ی آن ها حرف r به کار رفته باشد.

جواب: $\binom{۷}{۴} \times ۵!$

ب) در همه‌ی آن ها حروف r , u به کار رفته باشد.

جواب: $\binom{۶}{۳} \times ۵!$

ج) در آن ها حروف r, u به کار نرفته باشد.

جواب: $\binom{۶}{۵} \times ۵!$

مثال ۲۳: انجمن فرهنگ و هنر دانشگاه ۶ نفر عضو دارد. به چند طریق می‌توان از بین این ۶ نفر یک نفر رئیس، یک معاون اجرایی و یک مسئول امور مالی انتخاب کرد؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰ √

جواب: $\binom{۶}{۳} \times ۳! = \frac{۶\times۵\times۴}{۳\times۲\times۱} \times ۶ = ۲۰ \times ۶ = ۱۲۰$

مثال ۲۴: با ارقام ۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۸، ۹ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توانیم بسازیم؛ به طوری که دو رقم از عدد سه رقمی ساخته شده زوج باشد؟

جواب:

$$\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{دو رقم از زوج ها}} \times \underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یک رقم از فرد ها}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جایگشت ارقام}}$$

مثال ۲۵: با ارقام ۹، ۷، ۵، ۳، ۱ چند عدد سه رقمی با شرط رقم صدگان> رقم دهگان > رقم یکان می‌توان نوشت؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ √ ۴) ۱۲

جواب: $۱۰ = \frac{۵\times۴\times۳}{۳\times۲\times۱} = \underbrace{۱}_{\text{فقط یک حالت وجود دارد که با سه رقم شرط برقرار شود.}} \times \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ عدد از ۵ عدد}}$

تمرین۱: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را یکی در میان در قفسه‌ای چید؟

۱) $\binom{۱۱}{۷} \times ۴! \times ۳!$

۲) $\binom{۱۱}{۷} \times ۴! \times ۳! \times ۲$

۳) $\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴} \times ۴! \times ۳!$

۴) $\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴} \times ۴! \times ۳! \times ۲$

مثال ۲۶: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را در قفسه‌ای چید؛ به طوری که:

الف) کتاب‌های سال اول یکی در میان باشند.

جواب: $۳ \times ۳! \times ۴! \times \binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴}$

ب) هیچ دو کتاب سال دومی متوالی نباشد.

جواب: $۳! \times ۴! \times \binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴}$

مثال ۲۷: پدر و مادر و ۳ فرزند آن ها برروی ۶ صندلی و در یک ردیف می‌نشینند، با کدام احتمال روی صندلی‌های متوالی هستند و فرزندان کنار هم هستند؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{\dagger\dagger\dagger}}_{\text{سه فرزند}}\ \underbrace{\dagger}_{\text{پدر}}\ \underbrace{\dagger}_{\text{مادر}}$$

$$n(S) = P(۶,۵)\ ,n(A) = \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی همه افراد}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی فرزند ها}} \times \underbrace{۲}_{\text{صندلی های متوالی}}$$

$$P(A) = \frac{۳! \times ۳! \times ۲}{P(۶,۵)} = \frac{۷۲}{۷۲۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

مثال ۲۸: پدر و مادر و ۳ فرزند آن ها برروی ۷ صندلی و در یک ردیف می‌نشینند، با کدام احتمال روی صندلی‌های متوالی هستند و فرزندان کنار هم هستند؟

جواب:

$$n(S) = P(۷,۵) \ \ , n(A) = \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی همه افراد}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی فرزند ها}} \times \underbrace{۳}_{\text{صندلی های متوالی}}$$

$$P(A) = \frac{۳! \times ۳! \times ۳}{P(۷,۵)} = \frac{۱۰۸}{۲۵۲۰}$$

مثال ۲۹: هر یک از ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ را در یکی از ۶ خانه‌ی هم ردیف به تصادف قرار می‌دهیم. با کدام احتمال این ارقام در خانه‌های متوالی و دو رقم زوج کنار هم قرار می‌گیرند؟(سراسری ریاضی ۸۷)

جواب:

$$n(S) = P(۶,۵) \ \ , n(A) = ۴! \times ۲! \times ۲$$

مثال ۳۰: تعداد ۷ نفر که ۲ برادر در بین آن ها حضور دارند، مفروضند. از بین آن ها ۵ نفر را انتخاب می کنیم و در یک ردیف کنار هم می نشانیم، با چه احتمالی دو برادر در ابتدا و انتهای ردیف نشسته اند؟

جواب: درمحاسبه تعداد اعضای فضای نمونه ای، ابتدا ۵ نفر از ۷ نفر را انتخاب می کنیم و سپس آن ها را در یک ردیف می نشانیم که !۵ جایگشت دارند:

$$n(S) = \binom{۷}{۵} \times ۵! = \frac{۷!}{۵! \times (۷-۵)!} \times ۵! = \frac{۷!}{۲} = ۲۵۲۰$$

برای آن که دو برادر در ابتدا و انتهای صف باشند باید حتما در بین انتخاب شده ها باشند. در نتیجه باید سه نفر از ۵ نفر باقیمانده را انتخاب کنیم و سپس جایگشت آن‌ها را طوری محاسبه می کنیم که دو برادر در ابتدا و انتهای صف باشند:

$$n(A) = \boxed{۲} \times \boxed{\binom{۵}{۳} \times ۳!} \times \boxed{۱} = ۱۲۰ \text{ و } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۲۱}$$

۳.۲احتمال های مربوط به انتخاب

احتمال‌های مربوط به انتخاب مانند انتخاب مهره، انتخاب موش، انتخاب سیب،..

- الف) با هم
- ب) متوالیا
  - بدون جایگذاری
  - با جایگذاری

۳.۲.۱ اشیاءِ را با هم انتخاب کنیم

مثال ۳۱: کیسه‌ای شامل ۵ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی زرد می‌باشد، سه مهره به تصادف و با هم از کیسه خارج می‌کنیم. مطلوبست احتمال آن که:

الف) فقط یک مهره سفید باشد.

جواب:

$$n(S)=\binom{۱۱}{۳}=۱۶۵\,,n(A)=\binom{۵}{۱}\times\binom{۶}{۲}=۷۵$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷۵}{۱۶۵}$$

ب) هر سه مهره آبی باشند.

جواب:

$$P(A)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۳}\binom{۷}{۰}}{۱۶۵}=\frac{۴}{۱۶۵}$$

ج) حداکثر دو مهره آبی باشد.

جواب:

$$P(\acute{B})=۱-P(B)=۱-\frac{۴}{۱۶۵}=\frac{۱۶۱}{۱۶۵}$$

د) یک مهره آبی و حداکثر یک مهره زرد باشد؟

جواب:

$$\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۱}}{۱۶۵}+\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}}{۱۶۵}=\frac{۴۰}{۱۶۵}+\frac{۴۰}{۱۶۵}=\frac{۸۰}{۱۶۵}$$

ه) دو مهره سفید و حداکثر دو مهره آبی باشد؟

جواب:

$$\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}+\binom{۴}{۰}\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۲}}{۱۶۵}=\frac{۶۰}{۱۶۵}$$

و) هر سه مهره همرنگ باشند.

جواب:

$$P(C)=\frac{\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۳}}{۱۶۵}=\frac{۱۴}{۱۶۵}$$

ز) مهره‌ها همرنگ نباشند.

جواب:

$$P(\acute{C})=۱-P(C)=۱-\frac{۱۴}{۱۶۵}=\frac{۱۵۱}{۱۶۵}$$

نکته: احتمال مهره ها همرنگ باشند – ۱ = احتمال حداکثر دو مهره همرنگ باشند.

ح) حداکثر دو مهره همرنگ باشد؟

جواب:

احتمال مهره ها همرنگ باشند – ۱= احتمال حداکثر دو مهره همرنگ باشند

$$۱-\frac{۱۴}{۱۶۵}=\frac{۱۵۱}{۱۶۵}$$

ط) مهره‌ها متمایز باشند (هیچ دو مهره‌ای هم رنگ نباشد).

جواب:

$$P(D)=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}}{۱۶۵}=\frac{۴۰}{۱۶۵}$$

ی) حداقل دو مهره هم رنگ باشد.

$$P(D')=۱-P(D)=۱-\frac{۴۰}{۱۶۵}=\frac{۱۲۵}{۱۶۵}$$

نکته: احتمال هیچ دو مهره ای همرنگ نباشند − ۱= احتمال حداقل دو مهره همرنگ باشند.

ح) هیچکدام از مهره‌ها سفید نباشند.

جواب:

$$P(E)=\frac{\binom{۵}{۰}\binom{۶}{۳}}{۱۶۵}=\frac{۲۰}{۱۶۵}$$

ط) حداقل یک مهره سفید باشد.

جواب:

$$P(\acute{E})=۱-\frac{۲۰}{۱۶۵}=\frac{۱۴۵}{۱۶۵}$$

ی) یک مهره آبی و حداقل یک مهره سفید باشد.

جواب:

$$\frac{\binom{۴}{۱}\times\binom{۵}{۱}\times\binom{۲}{۱}+\binom{۴}{۱}\times\binom{۵}{۲}\times\binom{۲}{۰}}{\binom{۱۱}{۳}}$$

ک) حداکثر سه مهره آبی باشد؟

جواب:۱

ل) حداقل دو مهره زرد باشد؟

جواب: $\frac{\binom{۲}{۲}\binom{۹}{۱}}{\binom{۱۱}{۳}}$

مثال۳۲: در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می کنیم، با کدام احتمال مهره های خارج شده هم رنگ اند؟(سراسری تجربی خارج ۹۲)

√۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۴}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

جواب:

$$\frac{\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۴+۱۰}{۸۴}=\frac{۱۴}{۸۴}=\frac{۱}{۶}$$

مثال۳۳: در جعبه‌ای۳ مهره‌ی سفید ۲ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره همرنگ نیستند؟ (سراسری تجربی ۹۴)

۱) $\frac{۲۸}{۴۵}$ ۲) $\frac{۲۹}{۴۵}$ √ ۳) $\frac{۳۱}{۴۵}$ ۴) $\frac{۳۲}{۴۵}$

جواب:

$$P\left(\text{همرنگ نبودن ۲ مهره ی انتخابی}\right)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}+\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}+\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}=$$

$$\frac{(۳\times۲)+(۳\times۵)+(۲\times۵)}{۴۵}=\frac{۳۱}{۴۵}$$

تمرین۲: در جعبه ای ۴ مهره سفید و۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می آوریم، با کدام احتمال فقط یکی از مهره ها سفید است ؟(سراسری تجربی خارج ۹۵)

۱) $\frac{۸}{۲۱}$ ۲) $\frac{۱۷}{۴۲}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۹}{۱۴}$

مثال۳۴: درظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می کنیم، با کدام احتمال حداقل یک مهره آبی خارج می شود؟ (سراسری تجربی خارج ۹۳)

۱) $\frac{۳۱}{۴۲}$ ۲) $\frac{۳۷}{۴۲}$ √ ۳) $\frac{۶۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۷۳}{۸۴}$

جواب:

$$\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۰}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{(۴\times۱۰)+(۶\times۵)+(۴\times۱)}{۸۴}=\frac{۷۴}{۸۴}=\frac{۳۷}{۴۲}$$

مثال۳۵: در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن ها جهت آزمایشی برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش های مورد آزمایش سفید است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ √ ۴) $\frac{۳}{۵}$

جواب:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۳}{۱}\times\binom{۵}{۳}}{\binom{۸}{۴}}=\frac{۳۰}{۷۰}=\frac{۳}{۷}$$

مثال۳۶: در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آن ها خارج می کنیم، با کدام احتمال لا اقل یکی از موش ها سفید است؟ (سراسری تجربی خارج ۹۱)

۱) $\frac{۸}{۱۱}$ ۲) $\frac{۹}{۱۱}$ ۳) $\frac{۲۸}{۳۳}$ ۴) $\frac{۲۹}{۳۳}$ √

جواب: خواسته سوال ۱یا ۲ یا ۳ تا از موش ها سفید باشند متمم آن برابر هیچ‌کدام سفید نباشند.

$$P(A')=۱-\frac{\binom{۵}{۰}\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}}=۱-\frac{۲۰}{۱۶۵}=\frac{۱۴۵}{۱۶۵}=\frac{۲۹}{۳۳}$$

تمرین۳: در جعبه ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴مهره از آن بیرون می آوریم، با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید است؟(سراسری تجربی خارج ۹۴)

۱) $\frac{۳۰}{۹۱}$ ۲) $\frac{۲۵}{۷۷}$ ۳) $\frac{۴۰}{۱۴۳}$ √ ۴) $\frac{۵۰}{۱۴۳}$

مثال۳۷: در آزمایشگاهی ۴ موش سفید و ۷ موش سیاه نگهداری می شوند. سه موش به تصادف بیرون می آوریم، احتمال آن که تعداد موش های سیاه بیشتر باشد کدام است؟

۱) $\frac{۸۴}{۱۶۵}$ ۲) $\frac{۱۰۹}{۱۶۵}$ ۳) $\frac{۵۶}{۱۶۵}$ ۴) $\frac{۱۱۹}{۱۶۵}$ √

جواب:

$$P(A)=\frac{\binom{۷}{۲}\binom{۴}{۱}+\binom{۷}{۳}\binom{۴}{۰}}{\binom{۱۱}{۳}}=\frac{۲۱\times ۴+۳۵\times ۱}{۱۶۵}=\frac{۱۱۹}{۱۶۵}$$

مثال۳۸: در آزمایشگاهی ۶ موش سیاه و ۴ موش سفید موجود است. به طور تصادفی ۲ موش از بین آن ها خارج می کنیم مطلوب است احتمال آن که:

الف) هر دو موش سفید باشند.

جواب:

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۶}{۰}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۶\times ۱}{۴۵}=\frac{۶}{۴۵}$$

ب) فقط یک موش سفید باشد.

جواب:

$$P(B)=\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۴\times ۶}{۴۵}=\frac{۲۴}{۴۵}$$

ج) موش سفید در بین آن ها نباشد.

جواب:

$$P(C)=\frac{\binom{۴}{۰}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۱\times ۱۵}{۴۵}=\frac{۱۵}{۴۵}$$

مثال۳۹: از بین ۳ موش سفید، ۴ موش سیاه و ۵ موش خاکستری، ۳ موش به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوبست احتمال آن که حداقل دو موش همرنگ باشد؟

۱) $\frac{۳}{۱۱}$ ۲) $\frac{۸}{۱۱}$ √ ۳) $\frac{۷}{۱۱۰}$ ۴) $\frac{۱۰۳}{۱۱۰}$

جواب: برای به‌دست آوردن احتمال آن که حداقل دو موش همرنگ باشد، از متمم استفاده می‌کنیم. که متمم آن برابراست با هیچ دو موشی مثل هم نباشد (موش‌ها متمایز باشند).

$$P(\acute{A}) = ۱ - \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}} = ۱ - \frac{۳ \times ۴ \times ۵}{\frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰}{۳ \times ۲ \times ۱}} = ۱ - \frac{۳ \times ۴ \times ۵}{۲ \times ۱۱ \times ۱۰}$$

$$= ۱ - \frac{۳}{۱۱} = \frac{۸}{۱۱}$$

مثال ۴۰: ۴ لامپ از ۱۰ لامپ موجود سوخته است. اگر سه لامپ به تصادف از بین آن‌ها اختیار کنیم احتمال آن که:

الف) یک لامپ سالم باشد.

جواب: $P(A) = \frac{\binom{۶}{۱}\binom{۴}{۲}}{\binom{۱۰}{۳}}$

ب) هر سه لامپ سالم باشند. (سراسری ریاضی).

جواب: $P(B) = \frac{\binom{۶}{۳}\binom{۴}{۰}}{\binom{۱۰}{۳}}$

ج) حداقل یک لامپ سوخته باشد.

جواب: حداقل یک لامپ سوخته باشد، برابر است با $C = \underbrace{۱ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۳}_{\text{لامپ سوخته}}$ که متمم آن $\acute{C}$ برابر است با این که هیچ لامپی نسوزد.

$$P(\acute{C}) = ۱ - \frac{\binom{۴}{۰}\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}$$

مثال۴۱: از میان ۵ مرد و ۴ زن می خواهیم یک تیم چهار نفره تشکیل دهیم. اگر افراد به تصادف انتخاب شوند، چقدر احتمال دارد:

الف) یک نفر زن باشد؟

جواب: $P(A) = \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۴}}$

ب) حداقل یک نفر مرد باشد؟

جواب: حداقل یک نفر مرد باشد برابر است با $\underbrace{\text{۴ یا ۳ یا۲ یا۱}}_{\text{مرد}} = B$ که متمم آن $\acute{B}$برابر است با هیچ‌کدام مرد نباشند.

$$P(\acute{B}) = ۱ - \frac{\binom{۵}{۰}\binom{۴}{۴}}{\binom{۹}{۴}}$$

ج) حداقل سه نفر زن باشد؟

جواب:

$$P(C) = \frac{\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۱} + \binom{۴}{۴}\binom{۵}{۰}}{\binom{۹}{۴}}$$

مثال۴۲: از هر چهار گروه آزمایشی به ترتیب ۱,۲,۳,۳ نفر داوطلب شرکت در آزمونی هستند؛ اگر به تصادف ۴ نفر از بین آن ها معرفی شوند با کدام احتمال:

الف) از هر گروه یک نفر معرفی شده اند؟ (سراسری ریاضی ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ √ ۳) $\frac{۲}{۲۱}$ ۴) $\frac{۳}{۱۴}$

جواب:

$$P(A) = \frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۹}{۴}} = \frac{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۳}{۱۲۶} = \frac{۱}{۷}$$

ب) حداقل دو نفر از یک گروه آزمایشی باشند.

جواب:

$$P(\acute{A}) = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۱}{۷} = \frac{۶}{۷}$$

مثال۴۳: برای انجام مسابقه‌ای ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی داوطلب شده‌اند؛ اگر به طور تصادفی ۴ نفر از بین آن ها انتخاب شوند با کدام احتمال، تعداد افراد انتخابی در این دو گروه متفاوتند؟

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ √ ۴) $\frac{۵}{۷}$

جواب: متمم این مساله برابر است با تعداد افراد انتخابی مساوی باشند.

$$P(\acute{A}) = ۱ - \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۴}} = ۱ - \frac{۶ \times ۱۵}{۲۱۰} = \frac{۲۰}{۲۱۰} = \frac{۴}{۷}$$

مثال۴۴: از هر یک از تیم های فوتبال، والیبال، هندبال و بسکتبال ۵ نفر به جلسه‌ای دعوت شده‌اند؛ اگر سه نفر به طور تصادفی از بین آن ها انتخاب شود مطلوبست احتمال آن که:

الف) دو به دو هم تیمی نباشند.

جواب: فضای نمونه‌ای برابر است با انتخاب ۳ نفر از کل افراد. یعنی ۲۰ نفر و برای پیشامدآن، ابتدا از ۴ تیم، ۳ تیم انتخاب می کنیم، سپس از هر تیم یک نفر انتخاب می کنیم.

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۲۰}{۳}}$$

ب) فقط دو نفر از آن ها هم تیمی باشند.

جواب: برای پیشامدآن ابتدا یک تیم از چهار تیم انتخاب می‌کنیم، سپس ۲ نفر از آن تیم بیرون آورده و سپس یک نفر باقیمانده را از بقیه افراد، یعنی ۱۵ نفر انتخاب می‌کنیم.

$$P(B)=\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}\binom{۱۵}{۱}}{\binom{۲۰}{۳}}$$

مثال۴۵: از میان ۲۰ دانش‌آموز که در ۴ ردیف مساوی روی نیمکت‌های یک کلاس نشسته‌ان، دو نفر را به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن که هر دو از یک ردیف باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۹}$ ۲) $\frac{۱}{۲۰}$ √ ۳) $\frac{۴}{۱۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۹}$

جواب:

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۲}}{\binom{۲۰}{۲}}=\frac{۱۰+۱۰+۱۰+۱۰}{۱۹۰}=\frac{۴۰}{۱۹۰}=\frac{۴}{۱۹}$$

مثال۴۶: از میان ۵ جفت کفش متمایز، سه لنگه به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن که در میان آن ها یک جفت موجود باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ √ ۴) $\frac{۱}{۳}$

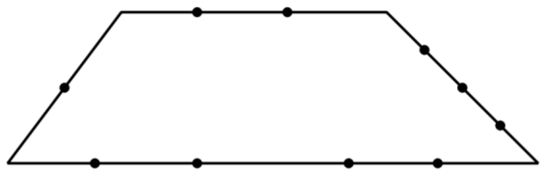
جواب:

$$n(S)=\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰\times ۹\times ۸}{۳\times ۲\times ۱}=\frac{۷۲۰}{۶}=۱۲۰$$

$$n(A)=\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{یک جفت از ۵ جفت}}\times\underbrace{\binom{۸}{۱}}_{\text{یک لنگه از ۸ لنگه باقیمانده}}=۵\times ۸=۴۰$$

$$P(A)=\frac{۴۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۳}$$

مثال۴۷: از میان ۱۰ نقطه‌ی زیر، ۴ نقطه به تصادف خارج می کنیم. احتمال آن که با ۴ نقطه ی انتخاب شده بتوان یک چهار ضلعی ساخت که روی هر خط فقط یک رأس چهار ضلعی قرار داشته باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی)

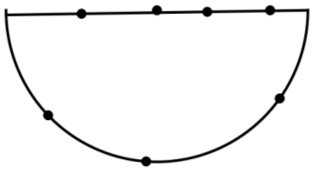


۱) $\frac{۱}{۳۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳۵}$ ۳) $\frac{۳}{۳۵}$ ۴) $\frac{۴}{۳۵}$ √

جواب:

$$P(A)=\frac{\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۰}{۴}}=\frac{۱\times ۲\times ۳\times ۴}{۲۱۰}=\frac{۴}{۳۵}$$

مثال۴۸: از نقاط شکل زیر سه نقطه به تصادف خارج می کنیم؛ احتمال آن که نقاط انتخاب شده تشکیل مثلث بدهند کدام است؟



۱) $\frac{۳۰}{۳۵}$ ۲) $\frac{۲۹}{۳۵}$ ۳) $\frac{۲۴}{۳۵}$ ۴) $\frac{۳۱}{۳۵}$ √

جواب:

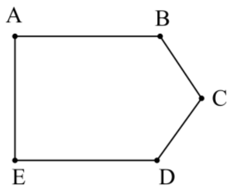
$$P(\acute{A}) = ۱ - \frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۷}{۳}} = ۱ - \frac{۴}{۳۵} = \frac{۳۱}{۳۵}$$

نکته: در صورتی که سه نقطه روی یک خط باشند، مثلث تشکیل نمی‌شود.

مثال۴۹: دو رأس از یک پنج ضلعی را به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن که این دو رأس مجاور باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$√ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

جواب:



$$A_{\text{پیشامد}} = \{AB, BC, CD, DE, EA\} \rightarrow P(A) = \frac{۵}{\binom{۵}{۲}} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

مثال۵۰: اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته اند، اگر به تصادف دو کارت از بین آن ها بیرون آوریم، با کدام احتمال:

الف) جمع اعداد این دو کارت زوج است ؟(سراسری ریاضی ۸۸)

۱√) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

جواب: **جمع دو عدد وقتی زوج است که یا هردو زوج باشند یا هر دو فرد باشند.**

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۲}}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۳+۳}{۱۵}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

ب) جمع اعداد این دو کارت فرد است؟

جواب:

جمع دو عدد وقتی فرد است که یکی زوج و یکی فرد باشد.

$$P(B)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۹}{۱۵}$$

ج) ضرب اعداد این دو کارت زوج است؟

جواب:

ضرب دو عدد وقتی زوج است که یا هردو زوج باشند، یا یکی زوج یکی فرد.

$$P(C)=\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۱۲}{۱۵}$$

مثال۵۱: اعداد ۹،...،۲،۱ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است؛ به تصادف دو کارت از بین آن ها بیرون می آوریم، با کدام احتمال مجموع عدد این دو کارت برابر ۱۱ است. (سراسری ریاضی ۹۱)

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

جواب:

$$A \text{پیشامد} = \{(۲,۹),(۳,۸),(۴,۷),(۵,۶)\}\ ,\ P(A) = \frac{۴}{\binom{۹}{۲}} = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

مثال۵۲: در ظرفی شش مهره با شماره های ۱,۲,۳,۴,۵,۶ ریخته شده اند دو مهره با هم بیرون می آوریم. با کدام احتمال شماره های این دو مهره اعداد متوالی اند؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

√۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۱۵}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

جواب:

$$A \text{پیشامد} = \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶)\}, P(A) = \frac{۵}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳}$$

مثال۵۳: در ظرفی ۱۰ مهره با شماره های ۱,۲,...,۱۰ موجود است. سه مهره به تصادف و با هم از جعبه خارج می کنیم؛ احتمال آن که عدد یکی از مهره ها ۵ و عدد هیچکدام ۱ یا ۲ نباشد کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۵}$ ۲) $\frac{۷}{۲۴}$ ۳) $\frac{۷}{۲۰}$ √ ۴) $\frac{۷}{۴۰}$

جواب:

$$P(A) = \frac{\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۲۱}{۱۲۰} = \frac{۷}{۴۰}$$

مثال۵۴: از مجموعه $A = \{۱۱,۱۲, \ldots ,۲۰\}$ یک عدد به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم؛ احتمال آن که این عدد یک عدد اول است چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ √ ۴) $\frac{۲}{۵}$

جواب:

$$A \text{ پیشامد} = \{۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\} \text{ و } P(A) = \frac{۴}{\binom{۱۰}{۱}} = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$$

۳.۲.۲ اشیاء را متوالی (یکی پس از دیگری) انتخاب کنیم

الف)بدون جایگذاری

نکته : در هنگام انتخاب مهره از کیسه ای به صورت متوالیاً اگر رنگ تک تک دفعات انتخاب به صراحت گفته شود، احتمال هر کدام را با توجه به شرط مهره قبلی به‌دست آورده و در هم ضرب می کنیم.

مثال۵۵: از کیسه‌ای محتوی ۵ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی قرمز، سه مهره به تصادف یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری انتخاب می کنیم؛ احتمال آن که اولی سفید، دومی و سومی قرمز باشند؛ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۳۵}$ ۳)√ $\frac{۱}{۲۱}$ ۴) $\frac{۳}{۳۵}$

جواب:

$$P(A)=\underbrace{\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۷}{۱}}}_{\text{سفید}}\times\underbrace{\frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۱}}}_{\text{قرمز}}\times\underbrace{\frac{\binom{۱}{۱}}{\binom{۵}{۱}}}_{\text{قرمز}}=\frac{۵\times۲\times۱}{۷\times۶\times۵}=\frac{۱۰}{۲۱۰}=\frac{۱}{۲۱}$$

مثال۵۶: از کیسه‌ای محتوی ۴ مهره سیاه و ۷ مهره‌ی قرمز دو مهره به تصادف و یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری خارج می کنیم، احتمال آن که:

الف) اولی سیاه و دومی قرمز باشد.

جواب:

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}\times\frac{\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}}=\frac{۴}{۱۱}\times\frac{۷}{۱۰}=\frac{۲۸}{۱۱۰}=\frac{۱۴}{۵۵}$$

ب) اولی قرمز و دومی قرمز باشد.

جواب:

$$P(B)=\frac{\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}\times\frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}}=\frac{۷}{۱۱}\times\frac{۶}{۱۰}=\frac{۴۲}{۱۱۰}=\frac{۲۱}{۵۵}$$

ج) دومی قرمز باشد.

جواب: چون در مورد مهره‌ی اول صحبت نشده و فقط گفته احتمال قرمز بودن مهره‌ی دوم کدام است بنابراین می توان این طور فرض کرد که این مهره، اولین مهره‌ای است که دارد از جعبه خارج می شود. (مهره‌ی دوم جایگزین مهره‌ی اول می‌شود چون در مورد مهره‌ی اول صحبت نکرده است.)

راه حل اول تشریحی:

$$P(C)=\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}\times\frac{\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}}+\frac{\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}\times\frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}}=\frac{۴\times۷}{۱۱\times۱۰}+\frac{۷\times۶}{۱۱\times۱۰}=\frac{۷۰}{۱۱۰}=\frac{۷}{۱۱}$$

راه حل دوم کنکوری:

$$\frac{\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}=\frac{۷}{۱۱}$$

مثال۵۷: در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره‌ی سیاه وجود دارد، دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می آوریم، با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ √ ۴) $\frac{۳}{۵}$

جواب:

راه حل اول تشریحی: اولین مهره سیاه و دومین مهره سفید، یا اولین مهره سفید و دومین مهره سفید باشد.

$$\frac{\binom{۹}{۱}}{\binom{۱۵}{۱}}\times\frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۴}{۱}}+\frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۵}{۱}}\times\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۴}{۱}}=\frac{۹\times ۶}{۱۵\times ۱۴}+\frac{۶\times ۵}{۱۵\times ۱۴}=\frac{۸۴}{۲۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

راه حل دوم کنکوری:

$$\frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۵}{۱}}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

مثال۵۸: از کیسه‌ای محتوی ۴ مهره‌ی قرمز و ۶ مهره‌ی سفید، سه مهره یکی پس از دیگری به تصادف خارج می کنیم؛ احتمال آن که اولی سفید و سومی سفید باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳)√ $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

جواب: چون درمورد مهره‌ی دوم صحبت نکرده، مهره‌ی سوم جایگزین مهره‌ی دوم می‌شود.

روش کنکوری: $P(A)=\underbrace{\frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}}}_{\text{سفید}}\times\underbrace{\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۹}{۱}}}_{\text{سفید}}=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵}{۹}=\frac{۳۰}{۹۰}=\frac{۱}{۳}$

نکته: اگر در سؤال یکی پس از دیگری (متوالی) انتخاب کردیم و در مورد بدون جایگذاری یا با جایگذاری صحبتی نکرد، منظور بدون جایگذاری است.

مثال۵۹: در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می شوند. به طور تصادف متوالیاً سه موش از بین آن ها انتخاب می شود، با کدام احتمال:

الف) اولین موش سفید، دومین موش سفید و سومین موش سیاه باشد.

جواب:

$$P(A)=\frac{\binom{5}{1}}{\binom{8}{1}}\times\frac{\binom{4}{1}}{\binom{7}{1}}\times\frac{\binom{3}{1}}{\binom{6}{1}}$$

ب) اولین موش سفید، دومین موش سیاه و سومین موش سیاه باشد.

جواب:

$$P(B)=\frac{\binom{5}{1}}{\binom{8}{1}}\times\frac{\binom{3}{1}}{\binom{7}{1}}\times\frac{\binom{2}{1}}{\binom{6}{1}}$$

ج) اولین موش سفید و سومین موش سیاه باشد.(سراسری تجربی ۸۸)

۱) $\frac{11}{56}$ ۲) $\frac{17}{56}$ ۳) $\frac{13}{56}$ ۴) $\frac{15}{56}$

جواب: چون در مورد موش دوم صحبتی نکرده است موش سوم به جای موش دوم قرار می گیرد.

روش کنکوری: $\frac{\underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{موش سفید}}}{\binom{8}{1}}\times\frac{\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{موش سیاه}}}{\binom{7}{1}}$

د) اولین موش سفید و دومین موش سیاه باشد.

جواب: چون درمورد موش سوم صحبتی نشده، با موش سوم کاری نداریم.

$$P(C)=\frac{\binom{5}{1}}{\binom{8}{1}}\times\frac{\binom{3}{1}}{\binom{7}{1}}$$

ه) اولین موش سیاه و دومین موش سیاه باشد.

جواب: چون درمورد موش سوم صحبتی نشده، با موش سوم کاری نداریم.

$$P(D)=\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۱}}\times\frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۷}{۱}}$$

و) دومین موش سفید باشد.

جواب: چون درمورد موش اول صحبتی نکرده است؛ موش دوم جایگزین موش اول می‌کنیم.

$$P(E)=\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۸}{۱}}$$

ز) سومین موش سیاه باشد.

جواب: چون درمورد موش اول و دوم صحبتی نکرده است موش سوم به عنوان موش اول در نظر گرفته می‌شود.

$$P(F)=\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۱}}$$

نکته: هرگاه قسمتی از فضای نمونه را بدون آگاهی از چند و چون آن حذف کنیم و سپس بخواهیم احتمال پیشامد دیگری، از همین فضای نمونه ای را حساب کنیم، می توان فرض کرد که اعضای حذف شده، به علت فاش نکردن اطلاعات فضای نمونه ای هم چنان در فضای نمونه ای حضور دارند.

مثال۶۰: ظرفی شامل ۳ مهره سیاه و ۷ مهره سفید است. یک مهره به تصادف و بدون دیدن رنگ آن خارج کرده و کنار می گذاریم. سپس دو مهره ی دیگر بر می داریم. احتمال آن که این دو مهره نا همرنگ باشند کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۱۵}$ √ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

جواب:

راه حل اول تشریحی:

$$P(A)=\underbrace{\frac{۳}{۱۰}}_{\text{مهره اول سیاه}}\times\frac{\overbrace{\binom{۲}{۱}\times\binom{۷}{۱}}^{\text{دو مهره نا همرنگ (یک سیاه و یک سفید)}}}{\binom{۹}{۲}}+\underbrace{\frac{۷}{۱۰}}_{\text{مهره اول سفید}}\times\frac{\overbrace{\binom{۳}{۱}\binom{۶}{۱}}^{\text{دو مهره نا همرنگ (یک سیاه و یک سفید)}}}{\binom{۹}{۲}}$$

$$=\frac{۳\times۲\times۷}{۱۰\times۳۶}+\frac{۷\times۳\times۶}{۱۰\times۳۶}=\frac{۱۶۸}{۳۶۰}\xrightarrow{\div ۲۴}=\frac{۷}{۱۵}$$

راه حل دوم کنکوری:

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{۲۱}{۴۵}=\frac{۷}{۱۵}$$

مثال۶۱: در کیسه‌ای **۳** مهره‌ی سفید و **۳** مهره‌ی سیاه وجود دارد. از این کیسه **۳** مهره خارج می‌کنیم و بدون آن که به رنگ آن ها نگاه کنیم، مهره‌ی چهارمی خارج می‌کنیم، احتمال آن که مهره‌ی آخری سفید باشد کدام است؟

√ ۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱   ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

جواب:

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۱}}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

نکته: در مسائل مربوط به متوالی و بدون جایگذاری، اگر خواسته ی سؤال در مورد ترتیب رنگ‌ها اشاره‌ای نکرد، فرض بر این می‌گذاریم که مهره‌ها را با هم برداشته‌ایم و مانند احتمال‌های مربوط به با هم حل می کنیم.

مثال۶۲: در یک کیسه ۲ مهره قرمز، ۴ مهره سیاه و ۵ مهره‌ی سفید وجود دارد و اگر سه مهره به تصادف یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری از کیسه خارج کنیم، احتمال آن که دو مهره سیاه باشد کدام است؟

جواب:

راه حل اول: چون ترتیب نگفته خودمان یک ترتیب دلخواه را در نظر می گیریم، سپس در تعداد جایگشت ها ضرب می کنیم.

$$P(A)=\left(\underbrace{\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}}_{\text{سیاه}}\times\underbrace{\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}}}_{\text{سیاه}}\times\underbrace{\frac{\binom{۷}{۱}}{\binom{۹}{۱}}}_{\text{غیر سیاه}}\right)\times\frac{\overbrace{۳!}^{\text{کل جایگشت}}}{\underbrace{۲!}_{\text{تکراری ها}}}$$

$$=\frac{۴\times۳\times۷}{۱۱\times۱۰\times۹}\times\frac{۶}{۲}=\frac{۲۸}{۱۱۰}=\frac{۱۴}{۵۵}$$

راه حل دوم:

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۲}\times\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۱}{۳}}=\frac{۶\times۷}{۱۶۵}=\frac{۴۲}{۱۶۵}=\frac{۱۴}{۵۵}$$

مثال۶۳: در یک کیسه ۴ مهره‌ی سفید و ۸ مهره‌ی سیاه وجود دارد. اگر سه مهره به تصادف یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری از کیسه برداریم، احتمال آن که حداقل یکی از آن ها سفید باشد کدام است؟

۱) $\frac{۴۷}{۵۵}$ ۲) $\frac{۴۱}{۵۵}$ √ ۳) $\frac{۴۳}{۵۵}$ ۴) $\frac{۳۹}{۵۵}$

جواب:

$$P(A) = ۱ - \frac{\binom{۴}{۰}\binom{۸}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}} = ۱ - \frac{۱ \times ۵۶}{۲۲۰} = \frac{۱۶۴}{۲۲۰} \xrightarrow{\div ۴} \frac{۴۱}{۵۵}$$

مثال ۶۴: از بین سه کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان، به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می آوریم، سپس کارت دوم را خارج می کنیم با کدام احتمال هر دو کارت همرنگ هستند؟ (سراسری تجربی ۹۱)

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ √ ۴) $\frac{۴}{۷}$

جواب:

راه حل اول: ممکن است اولین کارت سفید و دومین کارت سفید باشد؛ یا اولین کارت سبز و دومین کارت نیز سبز باشد.

$$\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۷}{۱}} \times \frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۱}} + \frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۱}} \times \frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۶}{۱}} = \frac{۳ \times ۲}{۷ \times ۶} + \frac{۴ \times ۳}{۷ \times ۶} = \frac{۱۸}{۴۲} \xrightarrow{\div ۶} \frac{۳}{۷}$$

راه حل دوم:

$$P(A) = \frac{\binom{۳}{۲} + \binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۳ + ۶}{۲۱} = \frac{۹}{۲۱} \xrightarrow{\div ۳} \frac{۳}{۷}$$

مثال۶۵: هر کدام از اعداد طبیعی یک رقمی را بر روی یک مهره نوشته و مهره‌ها را در درون یک کیسه می اندازیم؛ به تصادف و بدون جایگذاری مهره‌ای بیرون می‌آوریم،

سپس مهره‌ی دوم را خارج می کنیم با کدام احتمال مجموع اعداد روی مهره ی انتخابی زوج است؟

جواب:

راه حل اول:

$$\frac{\binom{5}{2}+\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}=\frac{10+6}{36}=\frac{16}{36}\xrightarrow{\div 4}\frac{4}{9}$$

راه حل دوم: احتمال آن برابراست با این‌که اولین و دومین مهره زوج یا اولین و دومین مهره فرد باشد.

$$\frac{\binom{5}{1}}{\binom{8}{1}}\times\frac{\binom{4}{1}}{\binom{9}{1}}+\frac{\binom{4}{1}}{\binom{8}{1}}\times\frac{\binom{3}{1}}{\binom{9}{1}}=\frac{4\times 5}{8\times 9}+\frac{3\times 4}{8\times 9}=\frac{20+12}{72}=\frac{32}{72}\xrightarrow{\div 8}\frac{4}{9}$$

ب) با جایگذاری

مثال۶۶: از کیسه‌ای محتوی ۵ مهره‌ی سفید، ۲ مهره‌ی سیاه و ۴ مهره‌ی قرمز، سه مهره به تصادف یکی پس از دیگری و با جایگذاری انتخاب می کنیم. احتمال آن که:

الف) اولی سفید، دومی سیاه و سومی قرمز باشد.

جواب:

$$\frac{\binom{4}{1}}{\binom{11}{1}}\times\frac{\binom{2}{1}}{\binom{11}{1}}\times\frac{\binom{5}{1}}{\binom{11}{1}}$$

ب) اولی سفید، دومی سفید و سومی قرمز باشد.

جواب:

$$\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}} \times \frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}} \times \frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}$$

پ) اولی سفید و سومی قرمز باشد.

جواب: چون درمورد مهره‌ی دوم صحبت نکرده است مهره‌ی سوم جایگزین مهره‌ی دوم می‌شود.

$$\frac{\overbrace{\binom{۴}{۱}}^{\text{سفید}}}{\binom{۱۱}{۱}} \times \frac{\overbrace{\binom{۵}{۱}}^{\text{قرمز}}}{\binom{۱۱}{۱}}$$

ت) یک مهره سفید، یک مهره سیاه و یک مهره قرمز باشد.

جواب: چون به ترتیب رنگ‌ها اشاره‌ای نکرده، خودمان یک ترتیب دلخواه می نویسیم و در تعداد جایگشت ها ضرب می کنیم. در این قسمت نمی‌توان مسأله را همانند انتخاب مهره ها با هم حل کرد.

$$\left(\frac{\overbrace{\binom{۵}{۱}}^{\text{سفید}}}{\binom{۱۱}{۱}} \times \frac{\overbrace{\binom{۲}{۱}}^{\text{سیاه}}}{\binom{۱۱}{۱}} \times \frac{\overbrace{\binom{۴}{۱}}^{\text{قرمز}}}{\binom{۱۱}{۱}}\right) \times \overbrace{۳!}^{\text{تعداد جایگشت}}$$

ث) دقیقاً دو مهره سفید باشد.

جواب:

راه حل اول: چون به ترتیب رنگ ها اشاره ای نشده، خودمان یک ترتیب دلخواه انتخاب می‌کنیم و سپس در تعداد جایگشت ها ضرب می‌کنیم.

$$\left(\overbrace{\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}}^{\text{سفید}} \times \overbrace{\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}}^{\text{سفید}} \times \overbrace{\frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۱}{۱}}}^{\text{غیر سفید}}\right) \times ۳!$$

مثال۶۷:کیسه‌ای حاوی ۲ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه است، اگر ۵ مهره به تصادف و با جایگذاری از کیسه خارج کنیم، احتمال آن که دقیقاً سه بار سفید بیاید کدام است؟

۱) $\frac{۲۰}{۲۴۳}$ ۲) $\frac{۱۰}{۲۴۳}$ ۳) $\frac{۴}{۲۴۳}$ ۴) $\frac{۴۰}{۲۴۳}$ √

جواب: گزینه ۴

راه حل اول:

$$\left(\overbrace{\frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۱}} \times \frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۱}} \times \frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۱}}}^{\text{سفید}} \times \overbrace{\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۶}{۱}} \times \frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۶}{۱}}}^{\text{سیاه}}\right) \times \frac{۵!}{۳! \times ۲!} = \left(\frac{۲^۳ \times ۴^۲}{۶^۵}\right) \times \frac{۱۲۰}{۶ \times ۲}$$

$$= \frac{۱۲۸}{۷۷۷۶} \times ۱۰ = \frac{۱۲۸۰}{۷۷۷۶} \xrightarrow{\div ۳۲} \frac{۴۰}{۲۴۳}$$

مثال۶۸: از مجموعه $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ سه بار و با جایگذاری عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال آن که:

الف) هر سه بار عددی زوج خارج شود چقدر است؟

جواب:

$$\left(\underbrace{\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}}_{\text{زوج}}\right)\times\frac{۳!}{۳!}=\frac{۸}{۶۴}\times\frac{۶}{۶}=\frac{۱}{۸}$$

ب) دقیقاً دو بار زوج بیاید؟

جواب:

$$\left(\underbrace{\frac{۲}{۴}\times\frac{۲}{۴}}_{\text{زوج}}\times\underbrace{\frac{۲}{۴}}_{\text{فرد}}\right)\times\frac{۳!}{۲!}=\frac{۸}{۶۴}\times ۳=\frac{۲۴}{۶۴}\xrightarrow{\div ۸}\frac{۳}{۸}$$

مثال۶۹: ظرفی حاوی سه مهره ی سیاه و ۵ مهره‌ی سفید است، یک مهره به تصادف از جعبه خارج می کنیم و پس از مشاهده رنگ، آن را به جعبه برمی گردانیم و مجدداً مهره‌ی خارج می کنیم احتمال آن که فقط یک بار سفید آمده باشد کدام است؟ (بار دوم سفید و بار اول سیاه یا بار دوم سیاه و بار اول سفید)

جواب:

راه حل اول: اگر بار اول سفید بیاید، باید بار دوم سیاه باشد. اگر بار اول سیاه بیاید باید بار دوم سفید باشد.

$$\frac{\overbrace{\binom{۵}{۱}}^{\text{بار اول سفید}}}{\binom{۸}{۱}}\times\frac{\overbrace{\binom{۳}{۱}}^{\text{بار دوم سیاه}}}{\binom{۸}{۱}}+\frac{\overbrace{\binom{۳}{۱}}^{\text{بار اول سفید}}}{\binom{۸}{۱}}\times\frac{\overbrace{\binom{۵}{۱}}^{\text{بار دوم سفید}}}{\binom{۸}{۱}}=\frac{۵\times ۳}{۸\times ۸}+\frac{۳\times ۵}{۸\times ۸}=\frac{۳۰}{۶۴}\xrightarrow{\div ۲}\frac{۱۵}{۳۲}$$

۳.۳احتمال های مربوط به انتخاب از دو جعبه

مثال ۷۰: در جعبه‌ی A، ۲ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه در جعبه B، ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه قرار دارد، از هر یک از دو جعبه یک مهره بیرون می‌کشیم احتمال آن‌که همرنگ باشند.

جواب: احتمال آن که دو مهره همرنگ باشند، برابر است با احتمال آن که مهره‌ی جعبه‌ی B سیاه و مهره‌ی جعبه‌ی A سیاه. یا مهره‌ی جعبه‌ی B سفید و مهره‌ی جعبه‌ی A سفید باشد.

$$\frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۱}} \times \frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۷}{۱}} + \frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۵}{۱}} \times \frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۱}} = \frac{۲\times۳}{۵\times۷} + \frac{۳\times۴}{۵\times۷} = \frac{۱۸}{۳۵}$$

مثال ۷۱: در ظرفی ۴ مهره ی سفید و ۵ مهره ی سیاه و یک مهره‌ی سبز وجود دارد. در ظرف دیگر نیز، ۶ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سبز قرار دارد. حالا به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می آوریم؛ با کدام احتمال رنگ این دو مهره متفاوت است؟ (سراسری ریاضی ۸۵ خارج از کشور)

۱) $\frac{۱۹}{۴۰}$ ۲) $\frac{۲۱}{۴۰}$ ۳) $\frac{۲۳}{۴۰}$ √ ۴) $\frac{۲۷}{۴۰}$

جواب:

$$۱ - \left(\frac{\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}} \times \frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۸}{۱}} + \frac{\binom{۱}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}} \times \frac{\binom{۲}{۱}}{\binom{۸}{۱}}\right) = ۱ - \left(\frac{۴\times۶}{۱۰\times۸} + \frac{۱\times۲}{۱۰\times۸}\right)$$

$$\rightarrow ۱ - \frac{۲۶}{۸۰} = \frac{۵۴}{۸۰} \xrightarrow{\div۲} \frac{۲۷}{۴۰}$$

مثال ۷۲: در جعبه A، ۲ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و در جعبه B، ۳ مهره سفید و ۴ مهره‌ی سیاه قرار دارد. از هر ظرف به تصادف دو مهره بیرون می آوریم با کدام احتمال ۴ مهره‌ی خارج شده همرنگ هستند؟

جواب:

$$\frac{\overbrace{\binom{۴}{۲}}^{\text{۲ مهره ی }B\text{سیاه}}}{\binom{۷}{۲}} \times \frac{\overbrace{\binom{۳}{۲}}^{\text{۲ مهره ی }A\text{ سیاه}}}{\binom{۵}{۲}} \overbrace{+}^{\text{یا}} \frac{\overbrace{\binom{۳}{۲}}^{\text{۲ مهره ی }B\text{سفید}}}{\binom{۷}{۲}} \times \frac{\overbrace{\binom{۲}{۲}}^{\text{۲ مهره ی }A\text{سفید}}}{\binom{۵}{۲}} = \frac{۲۱}{۲۱۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

۱۳.۴احتمال های دو انتخابی (ابتدا انتخاب جعبه سپس انتخاب مهره)

مثال۷۳: دو ظرف همانند داریم که در ظرف اول، ۶ مهره ی سفید و ۴ مهره ی سیاه و در ظرف دوم، ۶ مهره ی سفید و ۸ مهر ه ی سیاه قرار گرفته است، با چشم بسته یکی از دو ظرف را اختیار کرده و مهره ای از آن خارج میکنیم. احتمال این که این مهره سفید باشد کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{۱۷}{۲۵}$ ۲) $\frac{۱۸}{۳۵}$ √ ۳) $\frac{۳۶}{۷۰}$ ۴) $\frac{۳۹}{۷۰}$

جواب: احتمال این که این مهره سفید باشد برابر است با انتخاب ظرف اول ومهره سفید باشد یا انتخاب ظرف دوم ومهره سفید باشد.

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۱}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۴}{۱}}=\frac{۶}{۲۰}+\frac{۶}{۲۸}=\frac{۳}{۱۰}+\frac{۳}{۱۴}=\frac{۴۲+۳۰}{۱۴۰}=\frac{۷۲}{۱۴۰}\xrightarrow{\div ۴}\frac{۱۸}{۳۵}$$

مثال۷۴: در اولین ظرف از سه ظرف همانند، ۳ مهره سفید و ۹ مهره سیاه و در دومین ظرف ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف سوم فقط مهره سیاه داریم. با چشم بسته از یکی از ظرف‌ها یک مهره بیرون می‌آوریم احتمال آن که این مهره سیاه باشد کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۲۴}$ √ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۳}$

جواب: احتمال آن که آن مهره سیاه باشد برابراست با انتخاب ظرف اول ومهره سیاه باشد یا انتخاب ظرف دوم ومهره سیاه باشد یا انتخاب ظرف سوم ومهره سیاه باشد.

$$\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۹}{۱}}{\binom{۱۲}{۱}}+\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۱}}+\frac{۱}{۳}\times ۱=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۳}=\frac{۱۷}{۲۴}$$

* چون ظرف سوم همگی سیاه هستند، پس احتمال سیاه بودن در ظرف سوم قطعی (حتمی) است. بنابراین احتمال آن یک است.

مثال۷۵: ظرف A، دارای ۵ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و ظرف B، دارای ۴ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و ظرف C دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه است. یک ظرف را به تصادف انتخاب کرده و ۳ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال:

الف) دو مهره از مهره های خارج شده سفید است؟

جواب:

$$\frac{1}{3}\times\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{6}{2}\binom{2}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{58}{168}$$

ب) هر سه مهره‌ی خارج شده، سفید هستند؟

جواب:

$$\frac{1}{3}\times\frac{\binom{5}{3}\binom{3}{0}}{\binom{8}{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{4}{3}\binom{4}{0}}{\binom{8}{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{6}{3}\binom{2}{0}}{\binom{8}{3}}=\frac{34}{168}$$

ج) سه مهره از مهره های خارج شده، سیاه می باشد؟

جواب: انتخاب سه مهره سیاه از ظرف سوم یک پیشامد غیر ممکن است؛ چون از ۲ مهره‌ی سیاه نمی توان ۳ مهره‌ی سیاه انتخاب کرد.

$$\frac{1}{3}\times\frac{\binom{5}{0}\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{4}{3}\binom{4}{0}}{\binom{8}{3}}+\frac{1}{3}\times 0=\frac{5}{168}$$

مثال۷۶: در ظرف A دارای ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه قرار دارد؛ و هر یک از دو ظرف B, C حاوی ۶ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه می‌باشد. به تصادف یکی از سه ظرف

را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده سفید است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

$\sqrt{}$ ۱) $\frac{۲۵}{۶۳}$ ۲) $\frac{۲۶}{۶۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

جواب: باید یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و سپس احتمال سفید بودن دو مهره از آن را به‌دست آورد. انتخاب ظرف A و ۲ تا از ۴ مهره‌ی سفید انتخاب شوند، یا انتخاب ظرف B و ۲ تا از ۶ مهره‌ی سفید انتخاب شوند، یا انتخاب ظرف C و ۲ تا از ۶ مهره‌ی سفید انتخاب شوند.

$$P=\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۴}}+\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}}+\frac{۱}{۳}\times\frac{\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}}\rightarrow$$

$$=\frac{۱}{۳}\times\frac{۶۰}{۱۲۶}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۴۵}{۱۲۶}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۴۵}{۱۲۶}=\frac{۲۰}{۱۲۶}+\frac{۱۵}{۱۲۶}+\frac{۱۵}{۱۲۶}=\frac{۵۰}{۱۲۶}\xrightarrow{\div ۲}\frac{۲۵}{۶۳}$$

مثال۷۷: در جعبه اول ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، و در جعبه دوم ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه ها را انتخاب کرده و دو مهره از آن بیرون می‌آوریم. باکدام احتمال هردو مهره سفید است؟ (سراسری تجربی خارج ۹۲)

$\sqrt{}$ ۱) $\frac{۳۱}{۱۶۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۳) $\frac{۱۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۱۳}{۵۶}$

جواب: باید یکی از دو ظرف را انتخاب کرده و سپس احتمال سفید بودن هر دو مهره از آن را به‌دست آوریم.

$$P=\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۶}{۴۲}+\frac{۳}{۷۲}=\frac{۴۳۲+۱۲۶}{۳۰۲۴}=\frac{۵۵۸}{۳۰۲۴}\xrightarrow{\div ۱۸}\frac{۳۱}{۱۶۸}$$

۱۳.۵احتمال های انتقالی

مثال۷۸: دو ظرف داریم، در ظرف اول ۵ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و در ظرف دوم ۷ مهره‌ی سفید و ۱۰ مهره‌ی سیاه موجود است. از ظرف یک مهره برداشته و بدون روئیت در ظرف دوم قرار می دهیم. آن گاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می آوریم، با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (سراسری ریاضی ۸۴, ۷۵)

۱) $\frac{۸}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۷}$ ۳) $\frac{۳۴}{۸۱}$ √ ۴) $\frac{۴۱}{۸۱}$

جواب: احتمال این که مهره ای که از ظرف دوم بیرون می‌آوریم سفید باشد برابر است با آن که مهره‌ی انتقالی از ظرف اول سفید باشد یا سیاه.

ظرف B	ظرف A
۷ سفید	۵ سفید
۱۰ سیاه	۴ سیاه

$$\frac{۷}{۱۸}\times\underbrace{\frac{۴}{۹}}_{\text{}} + \frac{۸}{۱۸}\times\underbrace{\frac{۵}{۹}}_{\text{}}$$

مهره ی انتقالی از ظرف اول سیاه است. مهره ی انتقالی از ظرف اول سفید است.

$$\rightarrow \frac{۴۰}{۱۶۲}+\frac{۲۸}{۱۶۲}=\frac{۶۸}{۱۶۲}\xrightarrow{\div ۲}\frac{۳۴}{۸۱}$$

مثال۷۹: دو ظرف همانند B, A به ترتیب A دارای ۵ مهره‌ی سیاه و ۳ مهره‌ی قرمز و B دارای ۶ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی قرمز است، ۴ مهره از ظرف A و ۳ مهره از ظرف B خارج کرده و در ظرف خالی C می ریزیم؛ و سپس از ظرف C یک مهره خارج می کنیم، احتمال آن که مهره‌ی خارج شده سیاه باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۲۳}{۲۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۸}$ ۴) $\frac{۱۹}{۲۸}$ √

جواب: احتمال آن که مهره خارج شده از ظرف C سیاه باشد، برابر است با احتمال آن که مهره‌ی انتخابی از ظرف A باشد یا از ظرف B.

ظرف A	ظرف B		ظرف C
۵ سیاه	۶ سیاه	$\rightarrow$	از A ۴
۲ قرمز	۲ قرمز		از B ۳

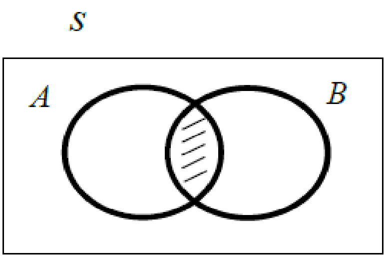
$$P=\frac{۴}{۷}\times\frac{۵}{۸}+\frac{۳}{۷}\times\frac{۶}{۸}=\frac{۲۰}{۵۶}+\frac{۱۸}{۵۶}=\frac{۳۸}{۵۶}\xrightarrow{\div ۲}\frac{۱۹}{۲۸}$$

۴قوانین احتمال

۴.۱اشتراک دو پیشامد

اگر B و A دو پیشامد باشند، $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که دو پیشامد B و A رخ دهند.

هرگاه از ما بخواهند احتمال آن که B و A رخ دهد (هم A و هم B رخ دهد، B و A هر دو رخ دهد) را به‌دست آوریم باید $P(A \cap B)$ را حساب کنیم.



$A \cap B$

نکته: اگر B و A دو پیشامد مستقل باشند آن $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

۴.۲دو پیشامد مستقل

دو پیشامد B و A را مستقل گوییم هرگاه، وقوع یکی در احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. (وقتی دو پیشامد مستقل هستند با دانستن یکی از آن ها نمی توان نتیجه دیگری را پیش بینی کرد)

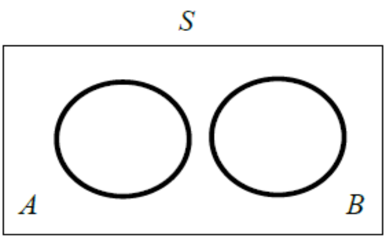
نکته: وقتی دو پیشامد مستقل هستند احتمال هر پیشامدی برای خودش مطرح است و به دیگری ربطی ندارد. مثلاً وقتی دو تاس را پرتاب می کنیم این دو تاس مستقل از هم هستند. اگر اعلام شود که تاس اول ۵ آمده است، چه قدر احتمال دارد تاس دوم ۳ بیاید می گوئیم $\frac{1}{6}$ چون این تاس دوم به تاس اول هیچ ربطی ندارد.(روی آن تأثیری ندارد)

نکته: هر وقت عکس العمل ما بعد از شنیدن صورت سؤال این طور بود که « چه ربطی داره» یعنی مستقل هستند.

مثال۱۷۴: احتمال قبولی حسن در کنکور و احتمال اینکه هفته دیگر برف بیاید دو پیشامد مستقل هستند.

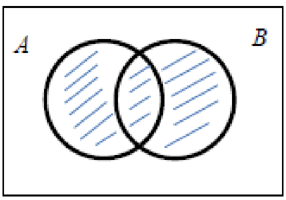
۴.۳دو پیشامد ناسازگار

دو پیشامد B و A را ناسازگار می گوئیم هرگاه، با هم نتوانند رخ دهند به عبارت دیگر وقوع یکی به معنی عدم وقوع دیگری است. یعنی $A \cap B = \emptyset$ و $P(A \cap B) = ۰$



۴.۴اجتماع دو پیشامد

اگر B و A دو پیشامد باشند، $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که یکی از پیشامدهای B و A یا هر دو رخ دهند. هرگاه از ما بخواهند احتمال آن که B یا A رخ دهد (لااقل یکی از پیشامدهای B یا A رخ دهد) را به‌دست آوریم، بایستی $P(A \cup B)$ را محاسبه کنیم.



A ∪ B

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

نکته: اگر B و A دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

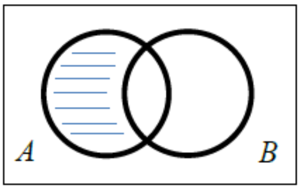
نکته: اگر B و A دو پیشامد ناسازگار باشند، آنگاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

۴.۵تفاضل دو پیشامد

اگر B و A دو پیشامد باشند $\mathrm{A - B}$ زمانی رخ می دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد. (فقط A رخ دهد).

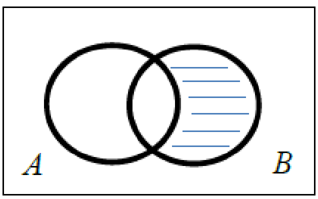
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$



A-B

اگر B و A دو پیشامد باشند $\mathrm{B - A}$ زمانی رخ می دهد که B رخ دهد ولی A رخ ندهد. (فقط B رخ دهد).

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$



*اگر B و A دو پیشامد مستقل باشند، داریم:

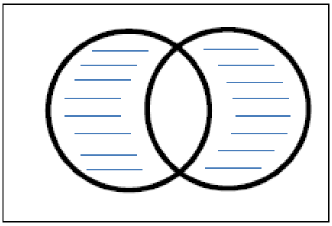
$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)\times P(B)$$
$$=\mathrm{P}(A)\big(۱-P(B)\big)=\mathrm{P}(A)\times \mathrm{P}(\acute{B})$$

- اگر B و A دو پیشامد ناسازگار باشند، داریم:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-۰=P(A)$$

۴.۶تفاضل متقارن

اگر B و A دو پیشامد باشند $(A-B)\cup(B-A)$ وقتی رخ می دهد که فقط A رخ دهد، یا فقط B رخ دهد. (فقط یکی از پیشامدها رخ دهد)



$(A\text{-}B)\cup(B\text{-}A)$

$$P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A\cup B)-(A\cap B)$$
$$=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$$

مثال۱: احتمال آن که شخص $\boldsymbol{A}$ تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی بگیرد ۰/۷و احتمال آن که شخص $\boldsymbol{B}$ تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی بگیرد ۰/۴ است. مطلوب است احتمال آن که:

الف) هر دو تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی بگیرند؟

جواب:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = ۰/۴ \times ۰/۷ = ۰/۲۸$$

ب) هر دو تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی نگیرند؟

جواب:

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = ۰/۳ \times ۰/۶ = ۰/۱۸$$

پ)حداقل یکی از آن دو تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی بگیرد؟

جواب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۷}{۱۰} + \frac{۴}{۱۰} - \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۴}{۱۰} = ۰/۸۲$$

ت) حداقل یکی از آن دو تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی نگیرد؟

جواب:

$$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B')$$
$$= \frac{۳}{۱۰} + \frac{۶}{۱۰} - \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۰} = ۰/۷۲$$

برای حل سوالاتی که حداکثر را از ما خواسته، حداکثر را به حداقل تبدیل می‌کنیم سپس فعل را منفی کرده، و از حداقل حل می‌کنیم.

ث) حداکثر یکی از آن دو تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی بگیرد؟

جواب: در این قسمت مسئله را تبدیل می‌کنیم به حداقل یکی از آن دو تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی نگیرد.

$$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B')$$
$$= \frac{۳}{۱۰} + \frac{۶}{۱۰} - \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۰} = ۰/۷۲$$

ج) حداکثر یکی از آن دو تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی نگیرد؟

جواب: در این قسمت مسئله را تبدیل می‌کنیم به حداقل یکی از آن دو تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی بگیرد.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۷}{۱۰} + \frac{۴}{۱۰} - \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۴}{۱۰} = ۰/۸۲$$

ح) فقط شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی بگیرد.

جواب: $\frac{۴۲}{۱۰۰}$

راه حل اول: چون مستقل هستند بنابراین داریم:

$$P(A) \times P(B') = \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۰} = \frac{۴۲}{۱۰۰}$$

راه حل دوم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۷}{۱۰} - \left(\frac{۷}{۱۰} \times \frac{۴}{۱۰}\right) = \frac{۷}{۱۰} - \frac{۲۸}{۱۰۰} = \frac{۴۲}{۱۰۰}$$

خ) فقط شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی بگیرد.

جواب: $\frac{۱۲}{۱۰۰}$

راه حل اول: چون مستقل هستند بنابراین داریم:

$$P(B) \times P(A') = \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۳}{۱۰} = \frac{۱۲}{۱۰۰}$$

راه حل دوم:

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{۴}{۱۰} - \left(\frac{۷}{۱۰} \times \frac{۴}{۱۰}\right) = \frac{۴}{۱۰} - \frac{۲۸}{۱۰۰} = \frac{۱۲}{۱۰۰}$$

د) فقط شخص A یا فقط شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی بگیرد.

جواب: $\frac{۵۴}{۱۰۰}$

راه حل اول:

$$P(A - B) + P(B - A) = \frac{۴۲}{۱۰۰} + \frac{۱۲}{۱۰۰} = \frac{۵۴}{۱۰۰}$$

راه حل دوم:

$$P(A) \times P(B') + P(B) \times P(A') = \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۰} + \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۳}{۱۰} = \frac{۵۴}{۱۰۰}$$

ذ) یک نفر ناراحتی قلبی بگیرد؟

جواب: همانند قسمت قبل(د) است که برابر است با $\frac{۵۴}{۱۰۰}$.

مثال۲: احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر ۰/۹ و برای شخص B برابر ۰/۸ است. با کدام احتمال، لا اقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت آمیز است؟(سراسری تجربی ۹۵)

۱) ۰/۹۲ ۲) ۰/۹۴ ۳) ۰/۹۶ ۴)√ ۰/۹۸

جواب:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = ۰/۹ + ۰/۸ - ۰/۹ \times ۰/۸ = ۰/۹۸$$

تمرین ۱: محمد به احتمال۰/۳ و علی به احتمال ۰/۴ امسال در کنکور قبول می شوند؛ احتمال آن که :

الف) هر دو نفر در کنکور قبول شوند ؟

جواب: ۰/۱۲

ب)هر دو نفر در کنکور مردود شوند؟

جواب: ۰/۴۲

پ) یک نفر قبول شود؟

جواب: ۰/۴۲

ت) حداقل یک نفر قبول شود؟

جواب: ۰/۵۸

ث) حداکثر یک نفر قبول شود؟

جواب: ۰/۸۸

مثال۳: در گروه زنان ساکن یک روستا ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آنان مهارت قالی بافی دارند؛ اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی بافی دارد؟ (سراسری ۹۰)

√۱) ۰/۷   ۲) ۰/۷۵   ۳) ۰/۸   ۴) ۰/۸۵

جواب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{۶۰}{۱۰۰} + \frac{۲۵}{۱۰۰} - \left(\frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۲۵}{۱۰۰}\right) = \frac{۶۰}{۱۰۰} + \frac{۲۵}{۱۰۰} - \frac{۱۵}{۱۰۰} = \frac{۷}{۱۰}$$

تمرین ۲: در بین افراد یک جامعه، ۰/۷۵ دارای رنگ چشم میشی و ۴۰ درصد گروه خونی شان از نوع A می باشد؛ اگر یک فرد به تصادف از بین آن ها انتخاب شود احتمال اینکه دارای رنگ چشم میشی یا دارای گروه خونی A باشد؟ (سراسری تجربی)

۱) ۰/۷۸ ‏ ‏ ‏ ۲) ۰/۸۲ ‏ ‏ ‏ ۳) ۰/۸۵ √ ‏ ‏ ‏ ۴) ۰/۹۵

مثال۴: احتمال قبولی دانش آموزی در درس فیزیک، ۰/۵۵ و در درس شیمی، ۰/۶ است. اگر احتمال آن که حداقل در یکی از دو درس قبول شود، ۰/۷۵ باشد، با کدام احتمال در هر دو درس قبول می شود؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۰/۳۵ ‏ ‏ ‏ ۲) ۰/۴ √ ‏ ‏ ‏ ۳) ۰/۴۵ ‏ ‏ ‏ ۴) ۰/۵

جواب:

$$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

۰/۷۵= ۰/۵۵ + ۰/۶ $-P(A \cap B)$

۰/۷۵ = ۱/۱۵ $-P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B)$ = ۱/۱۵ – ۰/۷۵$\rightarrow \frac{۱۱۵}{۱۰۰} - \frac{۷۵}{۱۰۰} = \frac{۴۰}{۱۰۰}$

مثال۵: احتمال آن که فرزندی در یک خانواده با چشم های روشن متولد شود ۰/۲ و احتمال آن که رنگ مویش روشن باشد، ۰/۳ است. اگر احتمال متولد شدن فرزندی با مو و چشم به رنگ روشن ۰/۱ باشد. احتمال آن را بیابید که فرزند متولد شده فقط موی روشن داشته باشد.

√۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

جواب:

$P(A) = ۰/۲$ چشم روشن , $P(B) = ۰/۳$ رنگ موی روشن

$P(A \cap B) = ۰ / ۱$ چشم روشن و رنگ مو روشن

$P(B - A) = ?\ \rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = ۰/۳ - ۰/۱ = ۰/۲$

تمرین ۳: ۰/۳ احتمال دارد فرزندی در یک خانواده با گروه خونی A متولد شود، و احتمال آن که رنگ چشم فرزند میشی باشد، ۰/۴ است. اگر احتمال متولد شده فرزندی با گروه خونی A و رنگ چشم میشی ۰/۱۵ باشد؛ مطلوبست احتمال آن که:

الف) حداقل یکی از آن ها گروه خونی A یا رنگ چشم میشی داشته باشد.

جواب: ۰/۵۵

ب) فقط گروه خونی A داشته باشد.

جواب: ۰/۱۵

ت) فقط گروه خونی A یا فقط رنگ چشم میشی داشته باشد.

جواب: ۰/۴

مثال۶: در یک کلاس ۴۰ نفری ۷ نفر فوتبالیست هستند دو نفر از آن ها را به تصادف انتخاب می کنیم؛ احتمال آن که اولی و دومی هر دو فوتبالیست باشندکدام است؟

۱) $\frac{۷}{۴۰}$ ۲) $\frac{۳}{۱۳}$ ۳) $\frac{۲}{۱۳}$ ۴) $\frac{۷}{۴۰} \times \frac{۶}{۳۹}$ √

جواب:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{۷}{۴۰} \times \frac{۶}{۳۹}$$

مثال۷: کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند:

جنسیت		تحصیلات
مرد	زن	
۱۵	۱۰	دانشگاهی
۹۰	۸۰	کمتر از دانشگاهی

الف) احتمال آن که کارمندی زن باشد و تحصیلات دانشگاهی داشته باشد.

جواب:

A: زن باشد $\rightarrow P(A) = \frac{۹۰}{۱۹۵}$

B: مرد باشد $\rightarrow P(B) = \frac{۱۰۵}{۱۹۵}$

C: تحصیلات دانشگاهی داشته باشد $\rightarrow P(C) = \frac{۲۵}{۱۹۵}$

D: تحصیلات کمتر از دانشگاهی داشته باشد $\rightarrow P(D) = \frac{۱۷۰}{۱۹۵}$

$$P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۱۹۵}$$

ب) احتمال آن که کارمندی مرد باشد یا تحصیلات دانشگاهی داشته باشد.

جواب:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{۱۰۵}{۱۹۵} + \frac{۲۵}{۱۹۵} - \frac{۱۵}{۱۹۵} = \frac{۱۱۵}{۱۹۵}$$

مثال۸: اگر A, B دو پیشامد مستقل باشند و$P(A) = \frac{۱}{۴}$ و $\mathrm{P}(B) = \frac{۱}{۳}$ حاصل $P\left(A \cup \acute{B}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ √   ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

جواب:

$$P(B') = ۱ - P(B) = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$$

$$= P(A) + P(B') - P(A) \times P(B') \quad = \frac{۱}{۴} + \frac{۲}{۳} - \left(\frac{۱}{۴} \times \frac{۲}{۳}\right)$$

$$= \frac{۱}{۴} + \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۶} = \frac{۳ + ۴ + ۲}{۱۲} = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$$

مثال۹: اگر $P(A) = ۰/۴, P(B) = ۰/۷, P(A \cup B) = ۰ / ۸۲$، آنگاه پیشامد A و B چگونه‌اند؟

۱) متمم ۲) یکی زیر مجموعهٔ دیگری ۳) ناسازگار √ ۴) مستقل

جواب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\rightarrow ۰/۸۲ = ۰/۴ + ۰/۷ - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = ۱/۱ - ۰/۸۲ = ۰ / ۲۸$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = ۰/۴ \times ۰/۷ = ۰ / ۲۸$$

مثـــال ۱۰: اگـــر A و B دو پیشـــامد ناســـازگار باشـــند و $P(A) = P(\acute{B}) = \frac{۱}{۳}$ آنگاه $P(A \cup B)$ کدام است؟

√ ۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

جواب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} - ۰ = ۱$$

مثـــال ۱۱: اگـــر $P(A) = \frac{۲}{۵}, P(B) = \frac{۱}{۳}, P(A \cup B) = \frac{۳}{۵}$ باشـــد $P(A - B)$ را به‌دست آورید.

جواب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۵} - P(A \cap B)$$

$$\rightarrow P(A \cap B) = \frac{۲}{۱۵}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۲}{۵} - \frac{۲}{۱۵} = \frac{۴}{۱۵}$$

نکته: اگر $A = \{a, a+۱, a+۲, \dots, b\}$ مفروض باشند $(a, b \in N)$ آنگاه:

الف) تعداد عضوهای مجموعه ی A برابر است با: $b - a + ۱$

ب) تعداد اعدادی که مضرب m هستند (بر m بخش پذیرند) برابر است با: $\left[\frac{b-a+۱}{m}\right]$

پ) تعداد اعدادی که هم مضرب m و هم مضرب n هستند برابر است با: $\left[\frac{b-a+۱}{[m,n]}\right]$ ک م م $[m, n]$

مثال۱۲: از مجموعه‌ی اعداد $\{۱۰۰, ۱۰۱, \dots, ۶۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم با کدام احتمال این عدد مضرب ۴ یا مضرب ۹ می تواند باشد؟ (سراسری ریاضی)

جواب:

$$\text{تعداد اعداد} = ۶۰۰ - ۱۰۰ + ۱ = ۵۰۱$$

$$A = ۴\ \text{مضرب}: \left[\frac{۵۰۱}{۴}\right] = [۱۲۵.۲] = ۱۲۵ \to P(A) = \frac{۱۲۵}{۵۰۱}$$

$$B = ۹\text{مضرب}: \left[\frac{۵۰۱}{۹}\right] = [۵۵.۶] = ۵۵ \to P(B) = \frac{۵۵}{۵۰۱}$$

$$A \cap B = ۹\ \text{هم مضرب ۴ هم مضرب}: \left[\frac{۵۰۱}{۳۶}\right] = [۱۳/۹] = ۱۳$$

$$P(A \cap B) = \frac{۱۳}{۵۰۱}, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\to \frac{۱۲۵}{۵۰۱} + \frac{۵۵}{۵۰۱} - \frac{۱۳}{۵۰۱} = \frac{۱۶۷}{۵۰۱}$$

۵احتمال های مربوط به فرزند و سکه

۵.۱ترتیب فرزندان بیان نشود

نکته: در یک خانواده‌ی n فرزندی احتمال آن که دقیقاً k فرزند پسر (دختر) باشد از فرمول $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$ به‌دست می‌آید. (از این فرمول وقتی استفاده می‌کنیم که تولد دختر و پسر هم شانس باشندو ترتیب فرزندان بیان نشود.)

اگر ترتیب فرزندان بیان نشود خودمان یک ترتیب بیان می‌کنیم و در تعداد جایگشت‌ها ضرب می‌کنیم یا از فرمول $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱: یک خانواده دارای چهار فرزند است. مطلوبست احتمال آن که:

الف) یک فرزند دختر داشته باشد.

جواب: $\frac{۱}{۴}$

راه حل اول:

$$(\text{پ پ پ د}) \rightarrow \frac{\binom{۴}{۱}}{۲^۴}$$

راه حل دوم:

$$\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)\times\frac{۴!}{۳!}=\frac{۴}{۱۶}=\frac{۱}{۴}$$

تذکر: در روش دوم ما یک ترتیب دلخواه را در نظر می گیریم، سپس در جایگشت فرزندان ضرب می کنیم.

ب) یک فرزند دختر و سه فرزند پسر داشته باشد.

جواب: $\frac{۱}{۴}$

راه حل اول:

$$\left(\text{پ پ پ د}\right) \rightarrow \frac{\binom{۴}{۱}}{۲^{۴}}$$

راه حل دوم:

$$\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)\times\frac{۴!}{۳!}=\frac{۴}{۱۶}=\frac{۱}{۴}$$

پ) دو فرزند پسر داشته باشد.

جواب: $\frac{۳}{۸}$

راه حل اول:

$$\left(\text{د د پ پ}\right) \rightarrow \frac{\binom{۴}{۲}}{۲^{۴}}=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

روش دوم:

$$\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)\times\frac{۴!}{۲!\times۲!}$$

ت) دو فرزند پسر و دو فرزنددختر داشته باشد. (سراسری تجربی ۸۴)

جواب: $\frac{۳}{۸}=\frac{۶}{۱۶}$ (همان قسمت پ می‌باشد.)

ث) دو فرزند پسر یا سه فرزند دختر داشته باشد. (سراسری تجربی ۹۰)

جواب:

$$\text{دو فرزند پسر } A: \rightarrow P(A)=\frac{\binom{۴}{۲}}{۲^{۴}}=\frac{۶}{۱۶}$$

$$\text{سه فرزند دختر } B: P(B)=\frac{\binom{۴}{۳}}{۲^{۴}}=\frac{۴}{۱۶}$$

$$A\cap B=\emptyset \rightarrow P(A\cap B)=۰$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{۶}{۱۶}+\frac{۴}{۱۶}-۰=\frac{۱۰}{۱۶}=\frac{۵}{۸}$$

ج) فرزندان همجنس باشند.

جواب:

$$\underbrace{\frac{\binom{۴}{۴}}{۲^{۴}}}_{\text{هر ۴ تا دختر}}\underbrace{+}_{\text{یا}}\underbrace{\frac{\binom{۴}{۴}}{۲^{۴}}}_{\text{هر ۴ تا پسر}}=\frac{۲}{۱۶}=\frac{۱}{۸}$$

چ) فرزندان همجنس نباشند.

جواب: متمم این مساله، فرزندان هم جنس می‌باشدکه در قسمت قبل حل شد. بنابراین :

$$۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$$

ح) تعداد فرزندان پسر بیشتر از تعداد فرزندان دختر باشد.

$$\underbrace{\frac{\binom{۴}{۳}}{۲^۴}}_{\text{۳ پسر}} \underbrace{+}_{\text{یا}} \underbrace{\frac{\binom{۴}{۴}}{۲^۴}}_{\text{۴ پسر}} = \frac{۴}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۵}{۱۶}$$

خ) تعداد فرزندان دختر و پسر با هم برابر باشد.

جواب: ۲پسر و ۲دختر به قسمت پ و ت مراجعه شود. که مقدار آن برابر است با: $\frac{۳}{۸}$

د) تعداد فرزندان دختر و پسر با هم متفاوت باشد.

جواب: متمم این مساله تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند که در قسمت قبل حل شد. بنابراین :

$$۱ - \frac{۳}{۸} = \frac{۵}{۸}$$

ذ) حداقل یک فرزند پسر داشته باشد.

جواب: متمم این مساله برابر است با، هیچکدام از فرزندان پسر نباشند. که مقدار آن برابر است با:

$$۱ - \frac{\binom{۴}{۰}}{۲^۴} = ۱ - \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

ر) حداکثر دو فرزند دختر داشته باشد.

جواب: متمم این مساله برابر است با ۳ یا ۴دختر داشته باشد. که مقدار آن برابر است با:

$$۱ - \frac{\binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۴}}{۲^۴} = ۱ - \frac{۴ + ۱}{۱۶} = ۱ - \frac{۵}{۱۶} = \frac{۱۱}{۱۶}$$

مثال ۲: در یک بیمارستان ۵ نوزاد متولد شده‌اند با کدام احتمال لااقل دو نفر از آنان دختر است؟

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۶}$

$$۱-\frac{\binom{۵}{۰}+\binom{۵}{۱}}{۲^{۵}}=۱-\frac{۶}{۳۲}=\frac{۱۳}{۱۶}$$

مثال ۳: خانواده‌ای دارای ۵ فرزند است در چند حالت آخرین فرزند، سومین پسر خانواده است؟

جواب:

$$\underbrace{\square\ \square\ \square\ \square}_{\text{از ۴ تای اول ۲ تا پسر}}\quad \underbrace{\boxed{\text{پ}}}_{\text{سومین پسر}}\quad \rightarrow \binom{۴}{۲}\times ۱$$

مثال ۴: خانواده‌ای دارای ۶ فرزند است احتمال آن که آخرین فرزند سومین پسر خانواده باشد کدام است؟

جواب:

$$\underbrace{\square\ \square\ \square\ \square\ \square}_{\text{از ۵ تای اول ۲ فرزند پسر است}}\quad \underbrace{\boxed{\text{پ}}}_{\text{سومین پسر خانواده}}\quad \rightarrow \frac{\binom{۵}{۲}}{۲^{۵}}\times\frac{۱}{۲}$$

مثال ۵: سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا سومین بار پشت بیاید، تعداد حالاتی که می‌توان در ۱۰ بار پرتاب سکه به این منظور برسیم چقدر است؟

جواب:

$$\underbrace{\square\square\square\square\square\square\square\square\square}_{\text{از ۹ تای قبل ۲ بار پشت آمده}} \quad \underbrace{\boxed{\text{پ}}}_{\text{سومین پشت}}$$

$$\binom{۹}{۲} \times ۱$$

مثال۶: سکه‌ای آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای سومین بار رو بیاید، احتمال آن که در هشتمین پرتاب به این منظور برسیم، کدام است؟

۱) $\frac{۱۲۱}{۱۲۸}$ ۲) $\frac{۲۸}{۵۶}$ ۳) $\frac{۵۶}{۲۵۶}$ ۴) $\frac{۲۱}{۲۵۶}$ √

جواب:

$$\square\square\ \square\square\square\square\square \quad \underbrace{\boxed{\text{پ}}}_{\text{سومین رو}} \rightarrow P = \frac{\binom{۷}{۲}}{۲^{۷}} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۲۱}{۲^{۸}} = \frac{۲۱}{۲۵۶}$$

۵.۲ترتیب فرزندان بیان شود (اصل ضرب)

مثال ۷: خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. مطلوبست احتمال آن که:

الف) فرزند اول و دوم پسر باشد.

جواب:

$$\overbrace{\frac{۱}{۲}}^{\text{اول پسر}} \times \overbrace{\frac{۱}{۲}}^{\text{دوم پسر}} \times \overbrace{\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)}^{\text{سوم دختر پسر}} \times \overbrace{\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)}^{\text{سوم دختر پسر}} = \frac{۱}{۴} \times ۱ \times ۱ = \frac{۱}{۴}$$

ب) فقط فرزند اول و دوم پسر باشد.

جواب:

$$\text{پ پ د د} \rightarrow \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۱۶}$$

پ) فرزند اول و دوم پسر و فرزند سوم و چهارم دختر باشد.

جواب:

$$\text{پ پ د د} \rightarrow \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۱۶}$$

ت) فرزند آخر دختر باشد.

جواب:

$$\begin{array}{c} \left(\text{د د د}\,\boxed{\text{د}}\right) \\ \left(\text{پ پ پ}\,\boxed{\text{پ}}\right) \end{array} \rightarrow \frac{۲}{۲} \times \frac{۲}{۲} \times \frac{۲}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

ث) فقط فرزند آخر دختر باشد.

جواب:

$$\text{د پ پ پ} \rightarrow \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۱۶}$$

ج) فرزند دوم و چهارم پسر باشد.

جواب:

$$\begin{matrix} (\text{د} - \text{د} -) \\ (\text{پ پ پ}) \end{matrix} \rightarrow \frac{۲}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

چ) فرزندان یک در میان دختر، پسر (پسر، دختر) باشند.

جواب: فرزندان به صورت (پ د پ د) یا (د پ د پ) هستند بنابراین داریم:

$$\left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۸}$$

۱۵.۳احتمال های مربوط به فرزند (غیر هم شانس)

مثال ۸: احتمال تولد فرزند پسر در یک خانواده $\frac{۱}{۴}$ است. چه قدر احتمـال دارد فرزنـد اول و دوم این خانواده همجنس باشند؟

جواب:

$$\underbrace{\frac{۱}{۴}}_{\text{پسر}} \times \underbrace{\frac{۱}{۴}}_{\text{پسر}} \underbrace{+}_{\text{یا}} \underbrace{\frac{۳}{۴}}_{\text{دختر}} \times \underbrace{\frac{۳}{۴}}_{\text{دختر}} = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$$

مثال ۹: اگر در یک خانواده احتمال به دنیا آمدن فرزند پسر ۰/۶ باشد، احتمال آن که:

الف) هر سه فرزند خانواده پسر باشند کدام است؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۰/۶}}_{\text{پسر}}\ \underbrace{\boxed{۰/۶}}_{\text{پسر}}\ \underbrace{\boxed{۰/۶}}_{\text{پسر}} \times \frac{۳!}{۳!}$$

ب) دو فرزند خانواده پسر باشد؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۰/۶}}_{\text{پسر}}\ \underbrace{\boxed{۰/۶}}_{\text{پسر}}\ \underbrace{\boxed{۰/۴}}_{\text{دختر}} \times \frac{۳!}{۲!}$$

۱۵.۴احتمال های مربوط به فرزند (ترکیبی)

مثال ۱۰: خانواده‌ای دارای چهار فرزند است. مطلوبست احتمال آن که فرزندان یک در میان پسر باشند و یا خانواده دارای ۲ فرزند پسر باشد. (مسئله ص ۵ ریاضی عمومی)

جواب:

$$\text{فرزندان یک در میان } A: \{\text{د پ د پ ، پ د پ د}\} \to p(A) = \frac{۲}{۱۶}$$

$$\text{پسر } ۲: B \to p(B) = \frac{\binom{۴}{۲}}{۲^{۴}} = \frac{۶}{۱۶}$$

$$A \cap B = \{\text{د پ د پ ، پ د پ د}\} \to p(A \cap B) = \frac{۲}{۱۶}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{۲}{۱۶} + \frac{۶}{۱۶} - \frac{۲}{۱۶} = \frac{۶}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$

مثال ۱۱: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. مطلوبست احتمال آن که فرزند اول پسر باشد یا خانواده دارای ۲ فرزند پسر باشد؟

جواب:

$$\text{فرزند اول پسر } A: \{\text{د پ پ ، پ پ پ ، پ پ د ، پ د د}\} \to p(A) = \frac{۴}{۲^{۳}} = \frac{۴}{۸}$$

$$\text{دو فرزند پسر } B \Rightarrow \frac{\binom{۳}{۲}}{۲^{۳}} = \frac{۳}{۸}$$

$$A \cap B = \{\text{د پ پ ، پ پ د}\} \to p(A \cap B) = \frac{۲}{۸}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{۴}{۸} + \frac{۳}{۸} - \frac{۲}{۸} = \frac{۵}{۸}$$

۱۵.۵احتمال های مربوط به روز تولد، ماه تولد و...

مثال ۱۲: احتمال آن که افراد A, B, C, D

الف) همگی در روز شنبه از روزهای هفته بدنیا آمده باشند؟

جواب:

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{\frac{۱}{۷}}}^{A}}_{\text{شنبه}} \times \underbrace{\overbrace{\boxed{\frac{۱}{۷}}}^{B}}_{\text{شنبه}} \times \underbrace{\overbrace{\boxed{\frac{۱}{۷}}}^{C}}_{\text{شنبه}} \times \underbrace{\overbrace{\boxed{\frac{۱}{۷}}}^{D}}_{\text{شنبه}} = \left(\frac{۱}{۷}\right)^{۴}$$

ب) همگی در یک روز از روزهای هفته بدنیا آمده باشند؟

جواب: $\left(\frac{۱}{۷}\right)^{۴} \times \underbrace{۷}_{\text{هفت روز داریم.}} = \left(\frac{۱}{۷}\right)^{۳}$

پ) همگی در یک روز به دنیا نیامده باشند؟

جواب: از متمم استفاده می‌کنیم که همگی در یک روز به دنیا آمده باشند.

$$۱ - \left(\frac{۱}{۷}\right)^{۳}$$

ت) روز تولد هیچ یک از آن ها مثل هم نباشد؟

جواب: این قسمت را با ۴ روش حل می‌کنیم.

راه حل اول: $\frac{۷}{۷} \times \frac{۶}{۷} \times \frac{۵}{۷} \times \frac{۴}{۷}$

راه حل دوم: $\frac{۷}{۷} \times \frac{۶}{۷} \times \dots \times \frac{(۷-۴)+۱}{۷}$

راه حل سوم: $\frac{P(۷,۴)}{۷^{۴}}$

راه حل چهارم: $\frac{P(۶,۳)}{۷^{۳}}$

مثال ۱۳: در یک کلاس ۲۵ نفره چقدر احتمال دارد:

الف) روز تولد هیچکدام یکسان نباشد .(سال را ۳۶۵ روزه در نظر بگیرید)

جواب: این قسمت را با ۳ روش حل می‌کنیم.

راه حل اول:

$$\frac{۳۶۵}{۳۶۵} \times \frac{۳۶۴}{۳۶۵} \times \ldots \times \frac{\left(۳۶۵ - ۲۵\right) + ۱}{۳۶۵}$$

راه حل دوم: $\frac{P(۳۶۵,۲۵)}{۳۶۵^{۲۵}}$ و راه حل سوم: $\frac{P(۳۶۴,۲۴)}{۳۶۵^{۲۴}}$

ب) حداقل دو نفر در یک روز متولد شده باشند.

جواب: متمم آن را محاسبه می‌کنیم، متمم آن در قسمت الف حل شد.

$$۱ - \frac{P\left(۳۶۴,۲۴\right)}{۳۶۵^{۲۴}}$$

تمرین۱: چهار دانش آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟(سراسری تجربی خارج ۹۲)

۱) $\frac{۱۹}{۴۸}$ ۲) $\frac{۴۱}{۹۶}$ $\surd$ ۳) $\frac{۲۲۳}{۴۸}$ ۴) $\frac{۵۵}{۹۶}$

۱۶احتمال های مربوط به پرتاب تاس

۱۶.۱احتمال های مربوط به یک تاس

مثال ۱: یک تاس را پرتاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال آن که:

الف) عدد رو شده زوج باشد.

جواب:

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\},\quad A=\{۲,۴,۶\}\ ,P(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

ب) عدد رو شده مضرب ۳ باشد.

جواب:

$$B=\{۳,۶\}\ ,P(B)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

پ) عدد رو شده اول باشد.

جواب:

$$C=\{۲,۳,۵\}\ ,\ P(C)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

ت) عدد رو شده کمتر از ۷ باشد.

جواب:

$$D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}=S\ ,P(D)=\frac{۶}{۶}=۱$$ پیشامد حتمی (قطعی)

ث) عدد رو شده بزرگتر از ۶ باشد.

جواب:

$$E=\{\ \ \}=\emptyset\ ,P(E)=\frac{۰}{۶}=۰$$ پیشامد غیر ممکن

نکته: در احتمال قطعی $P(S)=۱$ و در احتمال نشدنی $P(\emptyset)=۰$ است.

۶.۲احتمال های مربوط به دو تاس

حالت ۱ دو تاس با هم درگیر نباشند: مانند هر دو تاس مضرب ۳، هر دو تاس زوج، حاصل ضرب دو تاس فرد و هر دو تاس عدد اول و... از اصل ضرب استفاده می کنیم.

نکته: اعضای فضای نمونه در پرتاب n تاس برابر ۶^n است.

مثال ۲: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم (یا یک تاس را دو بار پرتاب می کنیم) مطلوبست احتمال آن که:

الف) اعداد رو شده تاس مثل هم باشند.

جواب:

$$A = \{(۱,۱), (۲,۲), \dots, (۶,۶)\}, n(A) = ۶, P = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

ب) اعداد رو شده تاس مثل هم نباشند.

جواب: $۱ - \frac{۶}{۳۶} = \frac{۳۰}{۳۶} = \frac{۵}{۶}$

پ) اعداد رو شده‌ی تاس متمایز باشند.

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۶}}_{\text{تاس اول ۶ حالت دارد.}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\text{تاس دوم ۵ حالت دارد.}} = ۳۰, P = \frac{۳۰}{۳۶} = \frac{۵}{۶}$$

ت) اعداد رو شده‌ی دو تاس مضرب ۳ باشند.

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۲}}_{۶\text{ یا }۳} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{۶\text{ یا }۳} = ۲ \times ۲ = ۴ \text{ و } P = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

ث) اعداد رو شده مضرب ۳ نباشند.

جواب: از متمم آن را حل می‌کنیم که اعداد رو شده مضرب ۳ باشند. (اگر یکی از اعداد مضرب ۳ باشد ایرادی ندارد).

$$۱ - \frac{۴}{۳۶} = \frac{۳۲}{۳۶}$$

اگر می‌گفت اعداد رو شده‌ی هر دو تاس مضرب ۳ نباشد جواب آن به صورت زیر است:

$$n(A) = \underbrace{\boxed{۴}}_{۵\text{ یا }۴\text{ یا }۲\text{ یا }۱} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{۵\text{ یا }۴\text{ یا }۲\text{ یا }۱} = ۱۶\,, P(A) = \frac{۱۶}{۳۶}$$

ج) هر دو تاس عدد اول باشند.

جواب:

$$n(A) = \underbrace{\boxed{۳}}_{۵\text{ یا }۳\text{ یا }۲} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{۵\text{ یا }۳\text{ یا }۲} = ۹\,, P(A) = \frac{۹}{۳۶}$$

چ) حداقل یکی از تاس‌ها عدد اول باشد.

جواب: $p = \frac{۲۷}{۳۶}$

ح) حاصلضرب اعداد رو شده فرد باشد.

جواب: $p = \frac{۹}{۳۶}$

خ) حاصلضرب اعداد رو شده زوج باشد.

جواب: $p = \frac{۲۷}{۳۶}$

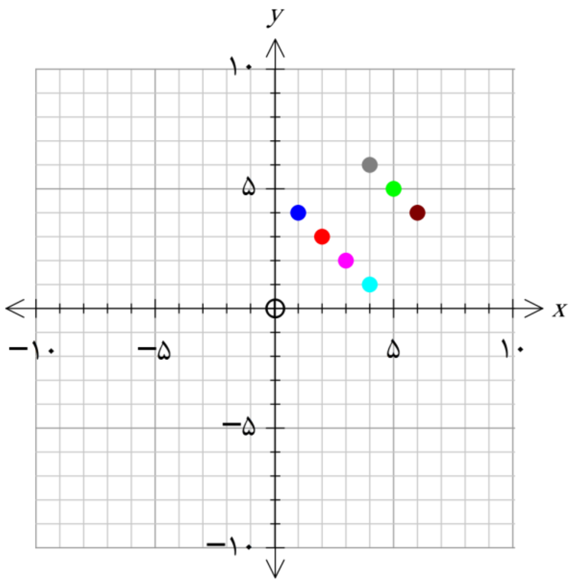
حالت ۲ دو تاس با هم درگیر باشند: مثل مجموع و تفاضل و...در این صورت دو محور عمود بر هم رسم می‌کنیم و حالت‌ها را مشخص می‌کنیم. (نمی‌توان از اصل ضرب استفاده کرد).

مثال ۳: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، مطلوبست احتمال آن که:

الف) مجموع دو عدد رو شده مضرب ۵ باشد.

جواب:

$$A = \{(۱,۴), (۲,۳), (۳,۲), (۴,۱), (۴,۶), (۵,۵), (۶,۴)\} \text{ و } P(A) = \frac{۷}{۳۶}$$



ب) مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ باشد. (سراسری تجربی ۹۲) (مثال ۴ ص ۱۰ ریاضی ۳ قسمت ه)

جواب:

$B = \{(۱,۳) , (۲,۲) , (۳,۱) , (۲,۶) , (۳,۵) , (۴,۴) , (۵,۳) , (۶,۲) , (۶,۶)\}$

$n(B) = ۹ , P(B) = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$

پ) مجموع اعداد رو شده مربع یک عدد طبیعی باشد. مثل (۳، ۱) و (۲، ۲) و...

جواب: $\frac{۷}{۳۶}$

ت) مجموع اعداد رو شده کمتر از ۱۰ باشد.

جواب: $\frac{۳۰}{۳۶}$

ث) مجموع اعداد رو شده برابر ۴ یا ۹ باشد.

جواب:

مجموع $۴: A = \{(۱,۳), (۲,۲), (۳,۱)\} \rightarrow P(A) = \frac{۳}{۳۶}$

مجموع $۹: B = \{(۳,۶), (۴,۵), (۵,۴), (۶,۳)\} \rightarrow P(B) = \frac{۴}{۳۶}$

$A \cap B = \{\quad\} \rightarrow p(A \cap B) = ۰$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۳}{۳۶} + \frac{۴}{۳۶} - ۰ = \frac{۷}{۳۶}$

ج) مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۸ یا هر دو فرد باشند.

جواب: $\frac{۱}{۳} = \frac{۱۲}{۳۶}$

چ) مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۸ و هر دو فرد باشند.

جواب: $\frac{۲}{۳۶}$

ح) مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۸ یا زوج باشند.

جواب: $\frac{۱۱}{۳۶}$

خ) مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۸ و هر دو زوج باشند.

جواب: $\frac{۳}{۳۶}$

د) اعداد رو شده زوج و اختلافشان برابر ۲ باشد.

جواب: $\frac{۴}{۳۶}$

ذ) دو تاس یکسان ظاهر شوند یا مجموعشان بزرگتر از ۹ باشد.

جواب: $\frac{۵}{۱۸}$

مثال ۳: در پرتاب دو تاس با هم، احتمال آن که اعداد رو شده متوالی باشند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۳۶}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ √ ۴) $\frac{۵}{۱۸}$

جواب:

$$A = \{(۱,۲), (۲,۳), (۳,۴), (۴,۵), (۵,۶), (۲,۱), (۳,۲), (۴,۳), (۵,۴), (۶,۵)\}$$
$$n(\mathrm{A}) = ۱۰, P(A) = \frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۵}{۱۸}$$

مثال ۴: یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم احتمال آن که عددی که بار دوم رو می‌شود کمتر از بار اول باشد؟

√۱) $\frac{۱۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۲۱}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱۲}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۸}{۳۶}$

جواب:

$$A = \{(۲,۱), (۳,۱), (۴,۱), (۴,۲), \dots\}, n(A) = ۱۵, \mathrm{P}(A) = \frac{۱۵}{۳۶}$$

تمرین۱: در پرتاب دو تاس با هم، احتمال آن که حداقل یکی از دو تاس ۵ بیاید کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ √۳) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۶.۳احتمال های مربوط به سه تاس

مثال ۵: سه تاس را با هم پرتاب می‌کنیم مطلوبست احتمال آن که:

$$n(S) = ۶^۳ = ۶ \times ۶ \times ۶$$

الف) اعداد ظاهر شده مثل هم باشند؟

جواب: $\frac{۶}{۶\times۶\times۶} = \frac{۱}{۳۶}$

ب) اعداد ظاهر شده مثل هم (یکسان) نباشند.

جواب: $۱ - \frac{۱}{۳۶} = \frac{۳۵}{۳۶}$

پ) اعداد ظاهر شده متمایز باشند.

جواب: برای به‌دست آوردن تعداد اعضای پیشامد تاس اول ۶ حالت دارد، تاس دوم ۵ حالت و تاس سوم ۴ حالت، که احتمال آن به صورت زیر است:

$$n(A) = ۶ \times ۵ \times ۴ \,, \mathrm{P}(A) = \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۶ \times ۶ \times ۶} = \frac{۵}{۹}$$

ت) حداقل دو عدد مثل هم باشند.

جواب: $۱ - \frac{۵}{۹} = \frac{۴}{۹}$

متمم: هیچ دو عددی مثل هم نباشند (اعداد متمایز باشند).

ث) اعداد ظاهر شده مضرب ۳ باشند.

جواب:

$$n(A) = \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۳\\۶}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۳\\۶}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۳\\۶}} = ۸\,,P(A) = \frac{۸}{۶ \times ۶ \times ۶} = \frac{۱}{۲۷}$$

ج) اعداد ظاهر شده مضرب ۳ نباشند ؟

جواب: $۱ - \frac{۱}{۲۷} = \frac{۲۶}{۲۷}$

چ) هر سه عدد ظاهر شده مضرب ۳ نباشند.

جواب:

$$n(A) = \overbrace{\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۱\\۲\\۴\\۵}}}^{\text{مضرب ۳ نباشد.}} \times \overbrace{\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۱\\۲\\۴\\۵}}}^{\text{مضرب ۳ نباشد.}} \times \overbrace{\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۱\\۲\\۴\\۵}}}^{\text{مضرب ۳ نباشد.}} \quad \text{و} \quad P(A) = \frac{۴\times۴\times۴}{۶\times۶\times۶}$$

ح) فقط دو تاس مضرب ۳ باشد.

جواب:

$$n(A) = \overbrace{\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۳\\۶}}}^{\text{مضرب ۳ باشد.}} \times \overbrace{\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۳\\۶}}}^{\text{مضرب ۳ باشد.}} \times \overbrace{\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۱\\۲\\۴\\۵}}}^{\text{مضرب ۳ نباشد.}} \times \frac{۳!}{۲!} \quad \text{و} \quad P(A) = \frac{۲\times۲\times۴\times\frac{۳!}{۲!}}{۶\times۶\times۶}$$

خ) هر سه عدد مضرب ۲ باشند.

جواب: $\frac{۱}{۸}$

$$n(A) = \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۲\\۴\\۶}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۲\\۴\\۶}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۲\\۴\\۶}} \quad \text{و} \quad P(A) = \frac{۳ \times ۳ \times ۳}{۶ \times ۶ \times ۶} = \frac{۱}{۸}$$

د) حاصلضرب سه عدد رو شده فرد باشد (بایستی هر سه عدد فرد باشند).

جواب:

$$n(A)=\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۱\\۳\\۵}}\times\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۱\\۳\\۵}}\times\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۱\\۳\\۵}} \text{ و } P(A)=\frac{۳\times۳\times۳}{۶\times۶\times۶}=\frac{۱}{۸}$$

ذ) حاصلضرب سه عدد رو شده زوج باشد.

جواب: $۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$

متمم: حاصلضرب سه عدد رو شده فرد باشد.

ر) یک بار ۶ و دو بار عدد دیگری ظاهر شود.

جواب:

$$n(A)=\underbrace{\boxed{۱}}_{۶}\times\underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵}}\times\underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵}}\times\underbrace{\frac{۳!}{۲!}}_{\text{تعداد جایگشت ها}} \text{ و } P(A)=\frac{۱\times۵\times۵\times\frac{۳!}{۲!}}{۶\times۶\times۶}=\frac{۲۵}{۷۲}$$

ز) فقط یک بار ۶ ظاهر شود ؟

جواب:مشابه قسمت (ر) است.

ژ) در بار سوم عدد ۶ رخ دهد.

جواب:

$$n(A)=\underbrace{\boxed{۶}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶}}\times\underbrace{\boxed{۶}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶}}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{۶} \text{ و } P(A)=\frac{۶\times۶\times۱}{۶\times۶\times۶}=\frac{۱}{۶}$$

س) فقط در بار سوم عدد ۶ رخ دهد.

جواب:

$$n(A)=\underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵}}\times\underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵}}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{۶} \text{ و } P(A)=\frac{۵\times۵\times۱}{۶\times۶\times۶}=\frac{۲۵}{۲۱۶}$$

ش) مجموع اعداد ظاهر شده از ۱۶ بزرگتر باشد.

جواب:

جمع سه عدد ۱۸ شود: $(۶,۶,۶)\to\frac{۳!}{۳!}=۱$.

جمع سه عدد ۱۷ شود: $(۶,۶,۵)\to\frac{۳!}{۲!}=۳$.

$$\to P=\frac{۴}{۶\times۶\times۶}=\frac{۱}{۵۴}$$

ص) مجموع اعداد ظاهر شده از ۱۵ بزرگتر باشد؟

جواب:

جمع سه عدد ۱۸ شود: $(۶,۶,۶)\to\frac{۳!}{۳!}=۱$.

جمع سه عدد ۱۷ شود: $(۶,۶,۵)\to\frac{۳!}{۲!}=۳$.

جمع سه عدد ۱۶ شود: $\begin{cases}(۶,۵,۵)\to\frac{۳!}{۲!}=۳\\(۶,۶,۴)\to\frac{۳!}{۲!}=۳\end{cases}$.

$$\to P = \frac{۱۰}{۶ \times ۶ \times ۶} = \frac{۱۰}{۲۱۶}$$

ض) مجموع اعداد ظاهر شده کمتر از ۵ باشد.

جواب:

$$۱ = \frac{۳!}{۳!} \to (۱,۱,۱)$$:جمع سه عدد ۳ شود .

$$۳ = \frac{۳!}{۲!} \to (۱,۱,۲)$$:جمع سه عدد ۴ شود .

$$\to P = \frac{۱ + ۳}{۶ \times ۶ \times ۶} = \frac{۴}{۲۱۶}$$

ط) مجموع اعداد ظاهر شده بزرگتر از ۵ باشد.

جواب: $۱ - \frac{۱۰}{۲۱۶}$

متمم: مجموع اعداد ظاهر شده بزرگتر از ۵ نباشد (کوچکتر یا مساوی ۵ شود).

مثال ۶: یک تاس سالم را سه بار پرتاب می‌کنیم، احتمال این که بین اعداد رو شده در سه پرتاب شرط برقرار باشد کدام است؟

(عدد رو شده در پرتاب اول > عدد رو شده در پرتاب دوم > عدد رو شده در پرتاب سوم)

جواب: از بزرگ به کوچک یعنی مثلاً (۲، ۵، ۶) و (۱، ۲، ۴) و... این حالت معادل انتخاب سه عدد از بین ارقام {۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱} است، یعنی:

$$n(A) = \binom{۶}{۳} \times \underbrace{۱}_{\text{ترتیب قرار گرفتن یک حالت دارد.}} \quad , P(A) = \frac{۲۰}{۶ \times ۶ \times ۶}$$

۶.۴احتمال پرتاب سکه و تاس با هم

مثال ۷: یک تاس را به هوا پرتاب می‌کنیم، اگر عددی اول ظاهر شود یک تاس سالم دیگر، و اگر عدد مرکب ظاهر شود دو سکه با هم، و در غیر این صورت یک سکه سالم پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

جواب:

$$\underbrace{\overset{۲\ ۳\ ۵}{\boxed{۳}}}_{\text{عدد اول}} \times \underbrace{\overset{۱۲۳۴۵۶}{\boxed{۶}}}_{\text{تاس دیگر}} = ۱۸ \text{ یا } \underbrace{\overset{۴\ ۶}{\boxed{۲}}}_{\text{عدد مرکب}} \times \underbrace{\overset{\text{پ ر}}{\boxed{۲}}}_{\text{سکه}} \times \underbrace{\overset{\text{پ ر}}{\boxed{۲}}}_{\text{سکه}} = ۸ \text{ یا } \underbrace{\overset{۱}{\boxed{۱}}}_{\text{عدد یک}} \times \underbrace{\overset{\text{پ ر}}{\boxed{۲}}}_{\text{سکه}} = ۲$$

$$n(S) = ۱۸ + ۸ + ۲ = ۲۸$$

نکته: برای احتمال‌های مربوط به سکه و تاس با هم احتمال‌های مربوط به هر کدام را جداگانه حساب می‌کنیم. (چون مستقل از هم هستند) اگر بین آن ها و به کار رفته بود در هم ضرب می‌کنیم (اشتراک)، اگر یا به کار رفته بود (اجتماع) را حساب می‌کنیم.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{اشتراک}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \text{ اجتماع}$$

مثال ۸: یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که:

الف) عدد تاس مضرب ۳ و سکه شیر بیاید.

جواب:

$$A = \{۳,۶\} \to P(A) = \frac{۲}{۶}, B = \left\{\text{ش} , \text{خ}\right\} \to P(B) = \frac{۱}{۲}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{۲}{۶} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۶}$$

ب) عدد تاس مضرب ۳ یا سکه شیر باشد.

جواب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۲}{۶} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

مثال ۹: در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم احتمال این که حداقل یک رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱ خارج از کشور)

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ √ ۴) $\frac{۱}{۳}$

جواب:

دو سکه $S = \{(\text{ر ر}), (\text{پ ر}), (\text{ر پ}), (\text{پ پ})\}$

حداقل یک رو $A = \{(\text{ر ر}), (\text{پ ر}), (\text{ر پ})\} \to P(A) = \frac{۳}{۴}$

تاس مضرب ۳ $B = \{۳, ۶\} \to P(B) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$

$$P(A \cap B) = \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۴}$$

مثال ۱۰:در پرتاب سه سکه و یک تاس با هم احتمال این که دو رو و عدد تاس مضرب ۳ نباشد کدام است؟

جواب:

$$\begin{cases} \text{دو رو } A: P(A) = \dfrac{\binom{۳}{۲}}{۲^۳} = \dfrac{۳}{۸} \\ \text{مضرب ۳ نباشد } B: P(B) = \dfrac{۴}{۶} \end{cases} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{۳}{۸} \times \frac{۴}{۶} = \frac{۱}{۴}$$

مثال ۱۱: در پرتاب دو سکه و دو تاس با هم، احتمال این که حداکثر یک پشت یا اعداد دو تاس فرد باشند کدام است؟

$$\text{حداکثر یک پشت } A:\ P(A) = \frac{۳}{۴}$$

$$\text{دو تاس فرد } B:\ P(B) = \frac{۹}{۳۶}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۳}{۴} + \frac{۹}{۳۶} - \left(\frac{۳}{۴} \times \frac{۹}{۳۶}\right)$$

منابع:

۱–امین پور،امین؛مبانی احتمال.۹۳.کتابخانه فرهنگ.

۲–ایرانمنش، علی؛ جمالی، محسن؛ ربیعی، حمید رضا؛ ریحانی، ابراهیم؛ شاهورانی، احمد؛ عالمیان، وحید؛ ریاضیات(۲).۹۲. شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران«سهامی خاص»

۳– بیژن زاده، محمد حسن؛ پاشا، عین الله؛ یوحنایی، که کو؛ ریاضی عمومی (۱) و(۲).۹۴. شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران«سهامی خاص»

۴–پاپولیس؛پیلای؛ دیانی، محمود؛ احتمال،متغیرها وفرایندهای تصادفی.۹۲.انتشارات نص.

۵–رستمی، محمد هاشم؛ عطوفی، عبدالحمید؛ گودرزی، محمد؛ ریاضیات(۳).۹۲. شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران«سهامی خاص»

۶–رنجبران،هادی؛آمار واحتمال و کاربرد آن در مدیریت و حسابداری.۹۲.اثبات.

۷– عباسی، نرگس؛شادر رخ، علی؛وحیدی اصل، محمد قاسم؛آمار واحتمال(۲).۹۴.انتشارات پیام نور.

۸–نیکوکار،مسعود؛ کنکور کارشناسی ارشد آمار واحتمال مهندسی.۹۳.انتشارات آزاده.